SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Haban

STATISTIČKE METODE IZRAČUNA UNISEX PREMIJA U OSIGURANJU

Diplomski rad

Voditelj rada:

Prof.dr.sc. Siniša Slijepčević

Zagreb, rujan 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. **____________________________, predsjednik**
2. **____________________________, član**
3. **____________________________, član**

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. **____________________________**
2. **____________________________**
3. **____________________________**

Sadržaj

Uvod

Prema presudi Europskog suda pravde 1. ožujka 2011. u Europskoj Uniji je od 21. prosinca 2012. zabranjeno korištenje spola kao faktora rizika prilikom određivanja visine premije od strane osiguravatelja. Do tada se je spol kao faktor rizika na primjeru njemačkog auto osiguranja koristio u korist mlađih žena, te starijih muškaraca. U obveznom osiguranju, mlađi muškarci (21 - 25 godina) su plaćali prosječno 133 Eura više nego mlađe žene, dok su starije žene (71 – 75 godina) plaćale 34 Eura više nego muškarci iste dobne skupine. Prema namjeri zakonodavca, ukidanjem spola kao faktora rizika bolji rizici bi morali plaćati više kako bi lošiji rizici plaćali manje. Nije li tek tom odlukom uvedena diskriminacija?

U 3. poglavlju ovog rada je navedeno kako zabrana korištenja spola kao faktora rizika može utjecati na određivanje cijene osiguranja koristeći podatke njemačkog auto osiguravatelja. Osiguravajuća društva mogu koristiti Opću metodu izračuna premije kojom se isključuje zabranjena varijabla (spol) iz varijabli koje se koriste za klasifikaciju rizika. Kako su mnogi ne-isključujući faktori rizika korelirani sa spolom, ta metoda ne eliminira razlike u cijeni između muških i ženskih vozača. No, kako bi ono što je zakonodavac namjeravao bilo i implementirano, osiguravatelji bi trebali koristiti, primjerice, Pope i Sydnor metodu. Njihova ideja je da se koriste sve, čak i zabranjene, varijable za klasifikaciju rizika i određivanje cijene u prvom koraku. U drugom koraku računa se prosjek preko zabranjene varijable. Drugo, manje elegantno rješenje je zabrana korištenja varijabli koreliranih sa spolom. No, to može dovesti do jako ograničenog modela, te do visokih premija izazvanih porastom neizvjesnosti.

Svrha 2. poglavlja jest uvesti osnove aktuarskog procjenjivanja pokrića neživotnog osiguranja. Dan je kratak opis glavnih značajki proizvoda neživotnog osiguranja potreban za računanje premija. Dalje su definirane premija ekvivalencije, neto i bruto premija. Kako bi se izračunala premija ekvivalencije, navode se statističke procjene potrebnih veličina. Kada skup dostupnih podataka koji izražava iskustvo potraživanja nije dovoljno dobar pokazatelj (npr. nije dovoljno velik), pristupa se stohastičkom modeliranju ukupne količine potraživanja. Kako se police uvijek razlikuju u nekim svojstvima, predlaže se usvajanje posebnih stopa premija, odnosno police se klasificiraju prema riziku. U 1. poglavlju dane su osnovne definicije i pojmovi iz područja vjerojatnosti i matematičke statistike koji se koriste u radu.

Poglavlje 1

Osnovne definicije i pojmovi

U ovom poglavlju dane su osnovne definicije i pojmovi iz područja vjerojatnosti i matematičke statistike.

Po tipu vrijednosti opaženog statističkog obilježja podatke dijelimo na:

- *numeričke varijable* (broj šteta, iznos šteta);
- *kategorijalne varijable* (spol, kategorija vozača).

Vrijednosti kategorijalnih varijabli zovemo *razredima*.

Numeričke se varijable dijele na:

- *diskretne* koje obično predstavljaju neko prebrojavanje (broj šteta);
- *neprekidne* koje obično predstavljaju rezultat mjerenja neke fizikalne ili novčane veličine (visina, težina, iznos šteta).

Neka je Ω neprazan skup. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ gdje su $\omega_1, \omega_2, \dots$ *elementarni događaji*. *Događaj* je podskup od Ω. $\mathcal{F}$ je *σ-algebra* događaja na Ω, ako je $\mathcal{F}$ familija podskupova od Ω, koja sadrži $\emptyset$ i zatvorena je na komplementiranje i prebrojive unije. Ako je $\mathcal{F}$ *σ-algebra* na Ω, uređen par $(\Omega, \mathcal{F})$ se zove *izmjeriv prostor*.

Definicija 1.1 Neka su $(X, \mathcal{X})$ i $(Y, \mathcal{Y})$ izmjerivi prostori. Funkcija f je $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-izmjeriva ako vrijedi $f^{-1}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X}$.

Definicija 1.2 Preslikavanje $\mathbb{P}$ koje svakom događaju A iz $\mathcal{F}$ pridružuje realan broj $\mathbb{P}(A)$ zovemo *vjerojatnost* na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, ako vrijedi:

i. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ za sve događaje A iz $\mathcal{F}$,
ii. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
iii. Za međusobno disjunktne događaje $A_1, A_2, \dots$ iz $\mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \dots) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) + \mathbb{P}(\mathrm{A}_2) + \cdots.$$

Broj $\mathbb{P}(A)$ zovemo *vjerojatnost događaja A*. Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zovemo *vjerojatnosni prostor*.

Definicija 1.3 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka su A i B dva događaja. *Uvjetna vjerojatnost* događaja A, uz uvjet da se dogodio B, $\mathbb{P}(B) > 0$, je definirana sa:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Definicija 1.4 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajna varijabla je izmjerivo preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ koje svakom elementarnom događaju pridružuje realan broj.

Definicija 1.5 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te $(S, \mathcal{S})$ izmjeriv prostor. Za svaki $t \geq 0$ neka je $X_t : \Omega \to$ S funkcija izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$. Familija $X = (X_t : t \geq 0)$ se zove slučajni proces s neprekidnim vremenom i skupom stanja S.

Slučajna varijabla X je *diskretna* ako je slika od X, ImX prebrojiv skup. Pri tome mora vrijediti da je $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ događaj za svaki $x \in ImX$. Diskretnoj slučajnoj varijabli X pridružujemo funkciju $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiranu sa $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$, koju zovemo *funkcija gustoće* razdiobe od X. Za f_X vrijedi:

i. $f_X(x) \geq 0$, za svaki x,
ii. $\sum_{x \in ImX} f_X(x) = 1$.

Slučajna varijabla X je *neprekidna* ako vrijedi:

i. ImX je interval u $\mathbb{R}$,
ii. Skup $\{a \leq X \leq b\}$ je događaj za sve realne brojeve $a < b$,
iii. Postoji funkcija $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je za sve $a < b$
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx.$$

Funkciju f_X zovemo *funkcija gustoće* razdiobe od X. Za f_X vrijedi:

i. $f_X(x) \geq 0$, za svaki x,
ii. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

Definicija 1.6 *Funkcija distribucije* $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definira se sa $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Vrijedi:

$$F_X(x) = \sum_{\{y \in ImX : y \leq x\}} f_X(y) \text{ za diskretnu slučajnu varijablu,}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy \text{ za neprekidnu slučajnu varijablu.}$$

Definicija 1.7 Neka je $X_1, \dots, X_n$ uzorak iz distribucije F. *Empirijska funkcija distribucije* u točki x definira se kao proporcija uzorka koja je manja ili jednaka x, tj. :

$$\widehat{F_n}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,x\,]}(X_i) .$$

Definicija 1.8 Zajednička funkcija distribucije od X i Y (ili *funkcija distribucije slučajnog vektora* (X,Y)) definira se kao funkcija $F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$.

Ako je (X,Y) diskretan slučajni vektor s funkcijom gustoće $f_{X,Y}$, tada vrijedi:

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{\{a\in ImX: a\leq x\}} \sum_{\{b\in ImY: b\leq y\}} f_{X,Y}(a,b) \text{ za sve realne } a,\, b,$$

gdje je

$$f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \begin{cases} p_{ij}, & za\ x = a_i, y = b_j \\ 0, & inače \end{cases} .$$

Ako je (X,Y) neprekidni slučajni vektor s funkcijom gustoće $f_{X,Y}$, tada vrijedi:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} dv\, f_{X,Y}(u,v) \text{ za sve realne } x,\, y,$$

gdje je $f_{X,Y}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi da je:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_{a}^{b} dx \int_{c}^{d} dy f_{X,Y}(x,y) \text{ za sve } a < b,\, c < d.$$

Definicija 1.9 Neka je (X,Y) slučajni vektor s funkcijom gustoće $f_{X,Y}$. *Marginalna gustoća od* X je dana sa:

$$f_X(\mathrm{x}) = \sum_{\{y\in ImY\}} f_{X,Y}(x,y),\ x \in \mathbb{R} \text{ u diskretnom slučaju,}$$

$$f_X(\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy,\ x \in \mathbb{R} \text{ u neprekidnom slučaju.}$$

To je ujedno i funkcija gustoće slučajne varijable X. Analogno se definira marginalna gustoća od Y.

Definicija 1.10 Neka je (X,Y) slučajni vektor s funkcijom gustoće $f_{X,Y}$, te marginalnim gustoćama f_X, f_Y. Ako je $f_Y(y) > 0$, za $y \in ImY$, tada je uvjetna funkcija gustoće od X, uz dano $Y = y$ definirana sa:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(\mathrm{y})},\ x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.11 Neka je (X, Y) slučajni vektor s funkcijom gustoće $f_{X,Y}$, te marginalnim gustoćama f_X, f_Y. Kažemo da su slučajne varijable X i Y nezavisne ako vrijedi:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(\mathrm{x}) f_Y(\mathrm{y}),\ x \in ImX,\ y \in ImY.$$

U slučaju diskretnih slučajnih varijabli X i Y, to je ekvivalentno sa:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y), \text{ za sve } x, y.$$

Definicija 1.12 *Matematičko očekivanje* slučajne varijable X definira se sa:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in ImX} x\, f_X(x) \text{ ako je } X \text{ diskretna},$$
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \text{ ako je } X \text{ neprekidna},$$

pod pretpostavkom da desne strane postoje u smislu da red/iintegral apsolutno konvergira.

Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable vrijedi $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Definicija 1.13 *Varijanca* slučajne varijable X je srednje kvadratno odstupanje varijable X od $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Standardna devijacija od X je drugi korjen od varijance $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}$.

Korištenjem linearnosti matematičkog očekivanja može se pokazati da je:

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Definicija 1.14 *Kovarijanca* slučajnih varijabli X ,Y definira se kao broj:

$$cov[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]\ .$$

Definicija 1.15 *Koeficijent korelacije* varijabli X i Y definira se s:

$$\rho = corr[X, Y] = \frac{cov[X,Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)}, -1 \leq \rho \leq 1.$$

Definicija 1.16 Ako je $\rho = 0$ kažemo da su X i Y *nekorelirane* slučajne varijable.

Dakle, nezavisne slučajne varijable su nekorelirane, dok obrat ne vrijedi.

Definicija 1.17 Neka je (X, Y) slučajni vektor te $f_X(x) > 0$. Uvjetno očekivanje od Y uz dano $X = x$ je matematičko očekivanje uvjetne distribucije od Y uz dano $X = x$:

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \sum_{y \in Imy} y\, f_{Y|X}(y|x) \text{ ako je } (X, Y) \text{ diskretan,}$$

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{y|X}(y|x) dy \text{ ako je } (X, Y) \text{ neprekidan.}$$

Ukoliko su X i Y nezavisne slučajne varijable vrijedi $\mathbb{E}[Y|X = x] = \mathbb{E}[Y]$.

Definicija 1.18 *Bernoullijeva razdioba*. Neka slučajna varijabla X poprima vrijednosti 1 = uspjeh i 0 = neuspjeh. Neka je $p = \mathbb{P}(X = 1)$ vjerojatnost uspjeha. Tada je funkcija gustoće od X jednaka:

$$f_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \text{ za } x \in ImX = \{0, 1\}.$$

Vrijedi $\mathbb{E}[X] = p$, $\mathbb{V}ar[X] = p(1-p)$.

Definicija 1.19 *Binomna razdioba*. Neka je slučajna varijabla X jednaka ukupnom broju uspjeha u n nezavisnih (ishod bilo kojeg pokusa ne ovisi o ishodima drugih pokusa) jednako distribuiranih (u svim pokusima je vjerojatnost uspjeha jednaka p) Bernoullijevih pokusa (pokusi u kojima nas zanima je li se uspjeh dogodio ili nije). Tada X ima binomnu razdiobu s parametrima n i p. Funkcija gustoće:

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \text{ za } x \in ImX = \{0, 1, \dots, n\}.$$

Vrijedi $\mathbb{E}[X] = np$, $\mathbb{V}ar[X] = np(1-p)$.

Definicija 1.20 *Negativna binomna razdioba*. Neka je slučajna varijabla X jednaka broju nezavisnih jednako distribuiranih Bernoullijevih pokusa s vjerojatnosti uspjeha p do uključivo k-tog uspjeha. Tada X ima negativnu binomnu razdiobu s parametrima k i p, $0 < p < 1$. Funkcija gustoće:

$$f_X(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k(1-p)^{x-k}, \text{ za } x \in ImX = \{k, k+1, \dots\}.$$

Vrijedi $\mathbb{E}[X] = \frac{k}{p}$, $\mathbb{V}ar[X] = k\frac{1-p}{p^2}$.

Definicija 1.21 *Poissonova distribucija.* Kažemo da diskretna slučajna varijabla X ima Poissonovu distribuciju s parametrom λ, $\lambda > 0$, i pišemo $X \sim Poi(\lambda)$, ako je njena funkcija gustoće:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \text{ za } x \in ImX = \{0, 1, \dots\}.$$

Vrijedi $\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}ar[X] = \lambda$. Poissonovu razdiobu koristimo za aproksimaciju binomne s parametrima n i p kada je n veliko (npr. $n \geq 100$), a p malo (npr. $p \leq 0.05$). Za parametar Poissonove razdiobe tada uzimamo $\lambda = np$.

Primjer 1.22 Neka su $X \sim Poi(\lambda)$ i $Y \sim Poi(\mu)$ nezavisne Poissonove slučajne varijable. Tada je njihov zbroj $Z = X + Y$ također Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda + \mu$, tj. $Z \sim \text{Poi}(\lambda + \mu)$.

Definicija 1.23 *Gamma distribucija***.** Kažemo da slučajna varijabla X ima Gamma distribuciju s parametrima $\alpha > 0$ i $\lambda > 0$, i pišemo $X \sim \Gamma(\alpha, 1/\lambda)$, ako je strogo pozitivna ($ImX = \langle 0, +\infty \rangle$) i funkcija gustoće je:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & za\ x > 0 \\ 0, & ina\check{c}e \end{cases},$$

gdje je $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ Γ-funkcija.

Definicija 1.24 *Normalna distribucija***.** Kažemo da X ima normalnu razdiobu s parametrima μ i $\sigma^2 > 0$ i pišemo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ako je $ImX = \mathbb{R}$ i gustoća joj je:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Vrijedi $\mathbb{E}[X] = \mu$, $\mathbb{V}ar[X] = \sigma^2$. Specijalno, standardizirana verzija normalne varijable X, $Z = (X - \mu)/\sigma$ ima jediničnu normalnu razdiobu ($\mathbb{E}[Z] = 0$, $\mathbb{V}ar[Z] = 1$).

Teorem 1.25 *Centralni granični teorem***.** Neka je je $X_1, \dots, X_n$ niz n.j.d. slučajnih varijabli s konačnim matematičkim očekivanjem μ i konačnom varijancom $\sigma^2 > 0$. Nadalje, neka je $\overline{X_n} = (X_1 + \ \dots, + X_n)/n$ za sve prirodne brojeve n. Tada za sve $a < b$ vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \leq \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

gdje je $\Phi(x)$ funkcija distribucije jedinične normalne razdiobe. Drugim riječima, kažemo da niz slučajnih varijabli $(\overline{X_n} - \mu)\sqrt{n}/\sigma$ konvergira po distribuciji jediničnoj normalnoj razdiobi kada n teži u beskonačnost (obično za $n \geq 30$).

Definicija 1.26 Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable. Neka je (X, Y) slučajni vektor s funkcijom gustoće $f_{X,Y}$, te marginalnim gustoćama f_X, f_Y. Neka je $Z = X + Y$. Tada je Z slučajna varijabla s funkcijom gustoće:

$$f_Z(z) = \sum_{x \in ImX} f_X(x) f_Y(z - x),\ z \in \mathbb{R}, \text{ u diskretnom slučaju,}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx,\ z \in \mathbb{R} \text{ u neprekidnom slučaju.}$$

Funkciju f_Z zovemo *konvolucijom* funkcija f_X, f_Y te pišemo $f_Z = f_X * f_Y$.

Definicija 1.27 Konvolucija više funkcija f_1, f_2, ... , f_n definira se rekurzivno:

$$f_1 * f_2 * \ldots * f_n = (f_1 * f_2 * \ldots * f_{n-1}) * f_n.$$

Linearna regresija

Neka su $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... , $x^{(k)}$ neslučajne varijable i Y slučajna varijabla mjerena u ovisnosti o $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)})$, odnosno $Y = Y(X)$. Linearni model ovisnosti veličine Y o x zadan je sa:

$$Y = \theta_0 + \theta_1 x^{(1)} + \cdots + \theta_k x^{(k)} + \varepsilon,$$

gdje je ε slučajna pogreška, a $\theta_0, \ldots, \theta_k$ parametri modela.

Oznake:

$x_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^k)$, za $i = 1,2, \ldots, n$ zadane vrijednosti od x takve da su barem dvije različite,
$y_1, y_2, \ldots, y_n$ realizacije slučajne varijable Y,
$Y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i^1 + \cdots + \theta_k x_i^k + \varepsilon_i$, za $i = 1,2, \ldots, n$ slučajne varijable.

Pretpostavljamo da vrijede Gauss Markovljevi uvjeti:

i. $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$, za svaki $i = 1,2, \ldots, n$,
ii. $\mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0$, za svaki $i, j = 1,2, \ldots, n$ takve da je i$\neq j$ (nekoreliranost),
iii. $\mathbb{V}ar[\varepsilon_i] = \sigma^2 > 0$, za svaki $i = 1,2, \ldots, n$.

Stavimo:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(k)} \\ 1 & x_2^{(1)} & \cdots & x_2^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_k \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}.$$

Nepristrani procjenitelj za θ metodom najmanjih kvadrata je tada:

$$\hat{\theta} = (X^t X)^{-1} X^t Y,$$

uz procjenu $\hat{\theta} = (X^t X)^{-1} X^t y$.

Hedonističke regresije su regresijske jednadžbe u kojima je zavisna varijabla cijena nekog proizvoda (dobra ili usluge), a nezavisne varijable su različite karakteristike tog proizvoda.

Napomena Više o regresiji može se pronaći u [2] , [3] , [5] .

Poglavlje 2

Neživotno osiguranje

Svrha ovog poglavlja jest uvesti osnove aktuarskog procjenjivanja pokrića neživotnog osiguranja. Dan je kratak opis glavnih značajki proizvoda neživotnog osiguranja potreban za računanje premija. Prvi idući korak potreban za izračun premija je procjena mogućeg iznosa potraživanja. Dalje su definirane premija ekvivalencije, neto i bruto premija. Kako bi se izračunala premija ekvivalencije, navode se statističke procjene potrebnih veličina. Kada skup dostupnih podataka koji izražava iskustvo potraživanja nije dovoljno dobar pokazatelj (npr. nije dovoljno velik), pristupa se stohastičkom modeliranju ukupne količine potraživanja. Kako se police uvijek razlikuju u nekim svojstvima, predlaže se usvajanje posebnih stopa premija, odnosno police se klasificiraju prema riziku.

2.1 Proizvodi neživotnog osiguranja

Osiguranje je ugovor između dviju strana (osiguravatelja i osiguranika) u kojem osiguravatelj pristaje obeštetiti osiguranika za jasno definirane gubitke. To čini u zamjenu za naknadu za plaćanje redovite *premije*.
Postoje dva glavna tipa osiguranja:

- *Neživotno osiguranje* je osiguranje kod kojeg ne postoji sigurnost da će se osigurani rizik dogoditi;
- *Životno osiguranje* je osiguranje kod kojeg će se ono od čega se osiguranik osigurava (njegova smrt) neizbježno dogoditi, jedina je neizvjesnost kada će to biti.

Sadržaj neživotnog osiguranja je kompenzacija osobe ili organizacije za gubitak ili štetu na njihovoj imovini ili obveza da se obešteti treću stranu za gubitak ili štetu koja proizlazi od navedenih nepredviđenih situacija poput požara, krađe, povrede, nepažnje itd.
U ugovoru neživotnih osiguranja iznos naknada nije naveden unaprijed. Iznos koji osiguravatelj plaća ovisi o težini gubitka ili štete koju je pretrpio osigurani. Nadalje, ukupna isplata osiguravatelja za jednu policu ne ovisi samo o veličini gubitka, nego i o broju potraživanja od strane osiguranika. Oba podatka su nepoznata u trenutku izdavanja ugovora. Razdoblje valjanosti osiguranja je uglavnom kratko, tipično jednu godinu. Vremena pojavljivanja nepoželjnih događaja su nepoznata, kao i vremena nagodbe, tako da se vremenski raspon godišnje police može produžiti na mnogo više od jedne godine, primjerice u slučaju sudskog spora. Izraz *godišnja polica* odnosi se na period

pokrivenosti, odnosno na razdoblje u kojem je potraživanje pokriveno od strane osiguravatelja.

Glavne kategorije proizvoda neživotnog osiguranja su sljedeće:

- S obzirom na moguće ugovornike:

  Osobna osiguranja upućena pojedincima ili obiteljima (npr. Osiguranje motornih vozila, Zdravstveno osiguranje);

  Komercijalna osiguranja, upućena poslovnim subjektima (npr. Prijevozno osiguranje).

- S obzirom na mogućeg korisnika:

  Imovinsko osiguranje nudi financijsku zaštitu od mogućih gubitaka ili štete na osiguranoj imovini, uključujući gubitak profita ili pojavu troškova;

  Osiguranje od odgovornosti nudi financijsku zaštitu od raznih potraživanja od odgovornosti;

  Zdravstveno osiguranje nudi financijsku zaštitu od troškova ili gubitka prihoda koji su potekli od bolesti ili nesreće.

- S obzirom na moguće osigurane slučajeve:

  Osiguranje u slučaju osobne nezgode daje naknadu u slučaju tjelesne ozljede ili gubitka dijela tijela;

  Osiguranje od bolesti daje povlastice u slučaju liječenja i naknadu bolničkih troškova;

  Osiguranje motornih vozila spaja povlastice osiguranja od odgovornosti i osiguranja imovine u korist vlasnika automobila;

  Pomorska i prijevozna osiguranja;

  Osiguranje od požara i drugih šteta imovini.

- S obzirom na vrijeme trajanja nagodbe:

  Kratkotrajno osiguranje kao npr. Osiguranje imovine, jer je relativno lagano i jednostavno potvrditi postojanje i veličinu gubitka;

  Dugotrajno osiguranje kao npr. Osiguranje za odgovornost, zbog mogućih sporova vezanih uz postojanje i veličinu nagodbe.

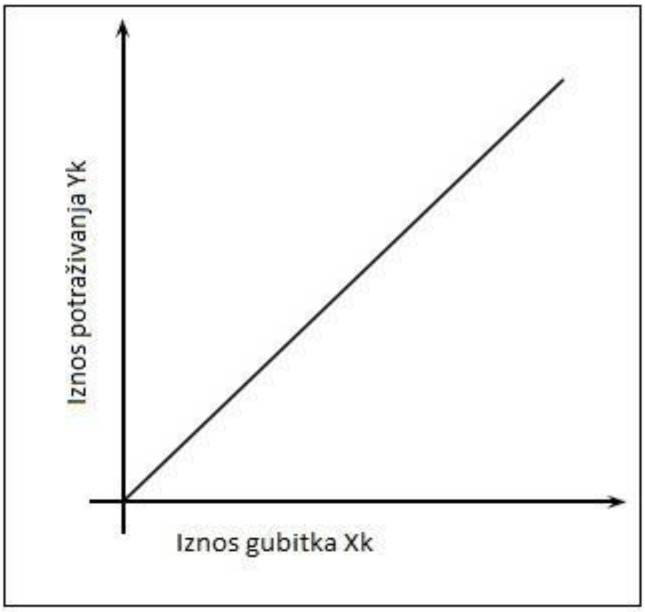
2.2 Gubitak i iznos potraživanja

Prvi korak potreban za izračun premije je procjena mogućeg iznosa potraživanja. Nije nužno da gubitak od strane osiguranika bude u potpunosti pokriven od strane osiguravatelja.

U slučaju police koja pokriva rizik s trajanjem od jedne godine, pretpostavlja se da će se unutar te godine dogoditi N potraživanja. N je slučajan nenegativan cijeli broj. Svako potraživanje će izazvati slučajan gubitak osiguraniku. X_k je gubitak osiguranika prouzročen od potraživanja k, $k = 1, 2, \ldots$. Prema uvjetima police, osiguravatelj će procijeniti iznos potraživanja Y_k za potraživanje k. Razumno je da je $Y_k \leq X_k$. Općenito, potraživanje Y_k je dana funkcija iznosa gubitka X_k. Takva funkcija naziva se *funkcija potraživanja*. Pretpostavlja se da se ista funkcija potraživanja f odnosi na bilo koje potraživanje, tj. $Y_k = f(X_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Treba napomenuti i da je Y_k definiran kao iznos potraživanja, bez uključenja troškova obrade zahtjeva.

Pod dogovorom *potpune kompenzacije*, osiguravatelj plaća u punini gubitak koji je pretrpljen od strane osiguranika ili od treće strane. Tada se funkcija potraživanja definira sa:

$$Y_k = X_k. \tag{2.2.1}$$



Slika 2.2.1 Iznos potraživanja prema punoj kompenzaciji, izvor [1, str. 399]

Slika 2.2.1 prikazuje iznos potraživanja prema punoj kompenzaciji. U slučaju osiguranja imovine, maksimalni iznos gubitka i maksimalna isplata koju obavlja osiguravatelj ovise o vrijednosti imovine V (na Slika 2.2.1 graf treba promatrati za $X_k \leq$ V). S druge strane, u slučaju osiguranja od odgovornosti nema ograničenja (na Slika 2.2.1 graf treba promatrati za $X_k > 0$).

Kako su neke ekstremne vrijednosti za iznos gubitka nerealne definira se *najveći vjerojatni gubitak* (engl. *maximum probable loss*, MPL), kao:

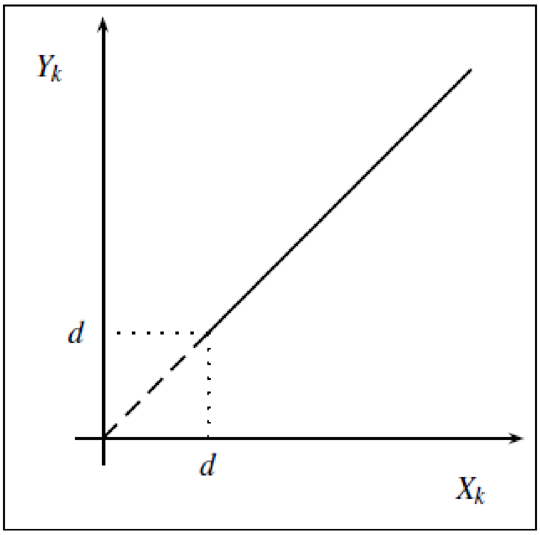
$$MPL = sup\{x: \mathbb{P}[X_k \leq x] = 1\}\,. \tag{2.2.2}$$

U slučaju osiguranja imovine može se dogoditi da je $MPL < V$, a u slučaju osiguranja od odgovornosti isključujemo gledati gubitke veće od MPL-a.

Dogovor (2.2.1) je očito nezadovoljavajuć za osiguravatelja. Osim što je izložen riziku visokih potraživanja, susreće se sa mogućnošću malih potraživanja, kojih obično ima puno i vuku za sobom troškove provođenja koji mogu biti veći od iznosa povlastica. Nadalje, osiguranik bi mogao biti neoprezan pri sprječavanju nesreća, budući da je cijena potraživanja u potpunosti naplaćena osiguravatelju.

Manja potraživanja se mogu izbjeći kroz *samopridržaje.* Posebno, prema *minimalnom samopridržaju* osiguravatelj se upliće samo ako je gubitak iznad danog praga, samopridržaja d. Iznos potraživanja se tada definira sa:

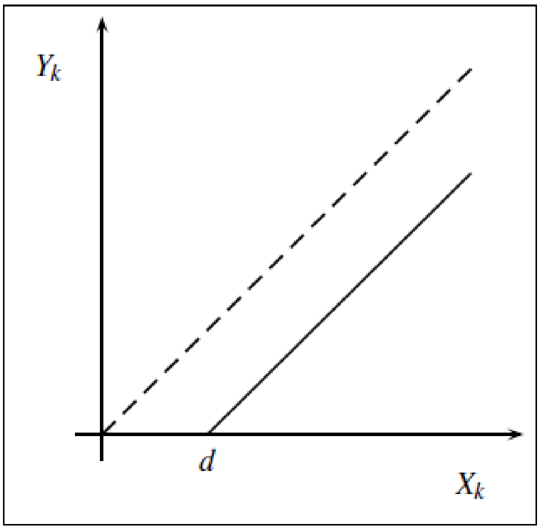
$$Y_k = \begin{cases} 0, & ako\ X_k \leq d \\ X_k, & ako\ X_k > d \end{cases}. \tag{2.2.3}$$



Slika 2.2.2 Iznos potraživanja prema minimalnom samopridržaju, izvor [1, str. 399]

Prema *samopridržaju s fiksnim iznosom*, iznos d je uvijek naplaćen vlasniku police. Tada je jasno da ako je iznos gubitka manji od d, nema plaćanja od strane osiguravatelja. Iznos potraživanja je definiran na sljedeći način:

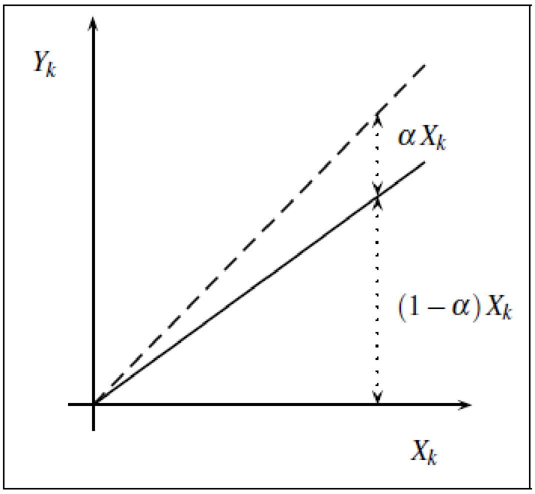
$$Y_k = \begin{cases} 0, & ako\ X_k \leq d \\ X_k - d, & ako\ X_k > d \end{cases}. \tag{2.2.4}$$



Slika 2.2.3 Iznos potraživanja prema samopridržaju s fiksnim iznosom, izvor [1, str. 399]

Prema *proporcionalnom samopridržaju* osiguraniku je naplaćen udio α od gubitka ($0 \leq \alpha < 1$). Iznos potraživanja je definiran sa:

$$Y_k = (1 - \alpha)\, X_k; \qquad 0 \leq \alpha < 1\,. \tag{2.2.5}$$

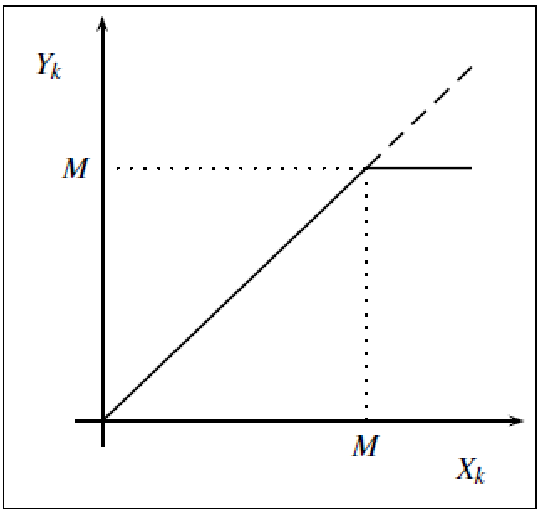


Slika 2.2.4 Iznos potraživanja prema proporcionalnom samopridržaju, izvor [1, str. 400]

Što je veći iznos gubitka, to je veća cijena koja je naplaćena osiguraniku. Takav dogovor je uobičajen u osiguranju imovine, u slučaju da je osigurana vrijednost V' manja od trenutne vrijednosti imovine V. U tom slučaju $\alpha = max\{1 - V'/V, 0\}$, gdje može vrijediti $V' \leq V$ ili $V' \geq V$. U slučaju $V' < V$, osiguravatelj u skladu s tim smanjuje iznos potraživanja, kako bi se izbjeglo da se prijavljuje potcijenjena vrijednost imovine, pa time plaća manja premija.

Kako bi se izbjegla velika potraživanja, osiguravatelj može postaviti gornja ograničenja. Ako je primijenjena granična vrijednost M, onda je iznos potraživanja definiran sa:

$$Y_k = min\{X_k, M\}. \quad (2.2.6)$$



Slika 2.2.5 Iznos potraživanja prema graničnoj vrijednosti, izvor [1, str. 401]

Kao što je već napomenuto, samopridržaji dozvoljavaju osiguravatelju da izbjegne troškove spora kod malih potraživanja. Time također potiče i smanjenje nagomilavanja troškova. Isto tako, granične vrijednosti, izbjegavajući prevelika potraživanja, smanjuju rizike osiguravatelja i time mogu dovesti do nižeg sigurnosnog troška (sigurnosni trošak pokriva operativne troškove osiguravatelja).

U Tablica 2.2.1 dan je iznos potraživanja za gubitke 100, 500 i 1000 za razne, prethodno navedene uvjete polica. Tako za proporcionalni samopridržaj uz $\alpha = 5\%$ imamo $Y_{100} = (1 - \alpha) X_{100} = 0.95 * 100 = 95$, $Y_{500} = (1 - \alpha) X_{500} = 0.95 * 500 = 475$, $Y_{1000} = (1 - \alpha) X_{1000} = 0.95 * 1000 = 950$. Slično se dobiju i ostali iznosi.

Uvjeti police	Gubitak		
	100	**500**	**1000**
Potpuna kompenzacija	100	500	1000
Minimalni samopridržaj, d=150	0	500	1000
Samopridržaj s fiksnim iznosom, d=150	0	350	850
Proporcionalni samopridržaj, α = 5%	95	475	950
Granična vrijednost, M=900	100	500	900
Proporcionalni samopridržaj, α = 5%, M=900	95	475	900
Minimalni samopridržaj, d=150, M=900	0	500	900
Minimalni samopridržaj, d=150, proporcionalni α=5%, M=900	0	475	900

Tablica 2.2.1 Iznos potraživanja prema alternativnim uvjetima police, izvor [1, str. 401]

2.3 Premije

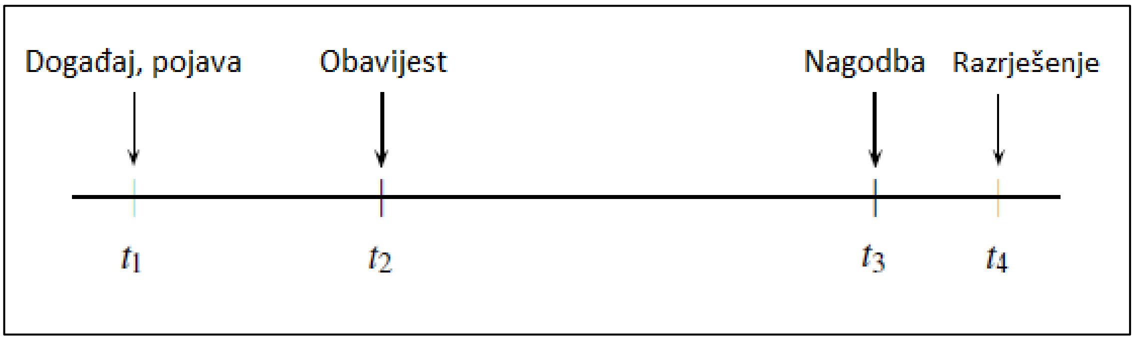
U ovom odjeljku definirane su premija ekvivalencije, neto premija i bruto premija. Po definiciji, premija ekvivalencije je očekivana sadašnja vrijednost isplate osiguravatelja. Kako bi se dobila neto premija, sigurnosni trošak mora biti dodan premiji ekvivalencije. Kao što je poznato, sigurnosni trošak je nagrada za rizike koje snosi osiguravatelj. Kada se neto premiji dodaju još inicijalna provizija osiguravatelja, administrativni i ostali troškovi te troškovi spora potraživanja, definirana je bruto premija.

2.3.1 Premija ekvivalencije

U neživotnom osiguranju, sljedeće stavke moraju biti uzete u obzir pri izračunu premije ekvivalencije:

i. Broj potraživanja koji može biti prijavljen po polici tijekom perioda pokrića,
ii. Iznos potraživanja svakog mogućeg potraživanja,
iii. Vrijeme plaćanja svakog potraživanja,
iv. Vrijednost vremena.

Slika 2.3.1.1 daje primjer mogućeg razvijanja jednog potraživanja. Potraživanje se događa u vrijeme t_1. To vrijeme se mora dogoditi prije isteka police (pretpostavlja se da je vrijeme dospijeća police jedna godina). Suprotno tome, vremena t_2, t_3 i t_4 se mogu dogoditi nakon dospijeća police. Vremenski razmak između događaja i nagodbe može se dogoditi zbog administrativnih obrada zahtjeva ili mogućih sporova. Vremenski razmak između događaja i obavijesti može trajati nekoliko dana (npr. za osiguranja motornih vozila) do nekoliko godina (npr. za odgovornost u zdravstvenom osiguranju, zbog prirode štete koja je učinjena i koja se može percipirati tek nakon nekog vremena od kad se dogodila). Između vremena t_1 i t_2 potraživanje je nastalo ali nije prijavljeno. Između vremena t_2 i t_4 je nepodmireno.



Slika 2.3.1.1 Mogući vremenski uzorak potraživanja, izvor [1, str. 403]

U svrhu računanja premije, uzimamo sljedeće dvije pretpostavke:

i. Potraživanje je prijavljeno čim se dogodilo i odmah je stečena nagodba (tj. $t_1 = t_2 = t_3$),
ii. Vremena pojavljivanja potraživanja su jednako raspodijeljena kroz godinu, tako da se u prosjeku potraživanja događaju u sredini godine za koju vrijedi polica, tj $t_1 = 1/2$.

U slučaju police koja pokriva rizik s trajanjem od jedne godine, pretpostavlja se da će se unutar te godine dogoditi N potraživanja. N je slučajan nenegativan cijeli broj, iako znamo da u praksi postoji n_{max} td. $N \leq n_{max}$. Svako potraživanje koje se je dogodilo će izazvati slučajan gubitak X_k osiguraniku, $X_k > 0$. Prema uvjetima police, potraživanje Y_k je definirano kao funkcija $f(X_k)$, $k = 1,2,\dots N$. Zbog mogućih samopridržaja može se dogoditi da je $Y_k = 0$, dok je $X_k > 0$. U praksi, često se događa da osiguranik ne prijavljuje štetu ako je iznos gubitka ispod samopridržaja, stoga se pretpostavlja $Y_k > 0$.

Agregatni iznos potraživanja (ili ukupna isplata koju obavlja osiguravatelj) u godini za policu je definiran na sljedeći način:

$$S = \begin{cases} 0, & ako\ N = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N, & ako\ N > 0 \end{cases}. \tag{2.3.1.1}$$

Premija ekvivalencije P, po definiciji očekivana sadašnja vrijednost osiguravateljeve isplate definirana je sa:

$$P = \mathbb{E}[S](1 + i')^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.3.1.2}$$

gdje je $\mathbb{E}[S]$ očekivana vrijednost isplate, dok je i' godišnja kamata koja označava vremensku vrijednost novca. Zbog kratkog trajanja police pretpostavlja se $i' = 0$.

Izračun $\mathbb{E}[S]$ se često provodi prihvaćanjem sljedećih pretpostavki:

i. Slučajne varijable X_k su nezavisne od slučajnog broja N,
ii. Za svaki N slučajne varijable $X_1, \dots, X_N$ su međusobno nezavisne i jednakodistribuirane (s istim očekivanjem, $\mathbb{E}[X_1]$).

Isto se pretpostavlja i za potraživanja $Y_1, \dots, Y_N$. Zahvaljujući tim pretpostavkama vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= \textstyle\sum_{h=0}^{\infty} \mathbb{P}[N = h]\mathbb{E}[S|N = h]\\ &= \textstyle\sum_{h=1}^{\infty} \Pi_h \, \mathbb{E}[S|N = h]\\ &= \textstyle\sum_{h=1}^{\infty} \Pi_h \sum_{i=1}^{h} \mathbb{E}[Y_i|N = h] = (i)\\ &= \textstyle\sum_{h=1}^{\infty} \Pi_h \sum_{i=1}^{h} \mathbb{E}[Y_i] = (ii)\\ &= \textstyle\sum_{h=1}^{\infty} \Pi_h h\mathbb{E}[Y_1]\\ &= \mathbb{E}\,[N]\mathbb{E}[Y_1]. \end{aligned} \qquad (2.3.1.3)$$

Primjećujemo da za procjenu ukupne isplate i zatim premije ekvivalencije, sve što trebamo je procjena očekivane *frekvencije štete* $\mathbb{E}[N]$ i očekivane *težine štete* $\mathbb{E}[Y_1]$.

2.3.2 Neto premija

Neto premija jednaka je premiji ekvivalencije uvećanoj za sigurnosni trošak. Pravilo koje se uzima da se odredi sigurnosni trošak zove se *princip premije*. Preciznije, princip premije je formula za izračun neto premije. Sigurnosni trošak se procjenjuje tako da se oduzme premija ekvivalencije od neto premije.
Prema *principu očekivane vrijednosti*, neto premija iznosi:

$$\Pi = (1 + \alpha)\mathbb{E}[S], \qquad (2.3.2.1)$$

gdje je α dani udio ($\alpha > 0$). Sigurnosni trošak, $\alpha\mathbb{E}[S]$ je proporcionalan ukupnoj očekivanoj isplati osiguravatelja. Nedostatak ovog pravila je taj da sigurnosni trošak nije baziran na mjeri rizika. Alternativni izraz za (2.3.2.1) slijedi:

$$\Pi = \mathbb{E}[S] + \kappa\Pi, \qquad (2.3.2.2)$$

gdje je sigurnosni trošak $\kappa\Pi$ izražen kao udio neto premije. Vrijedi:

$$(1 - \kappa)\Pi = \mathbb{E}[S] \Rightarrow \Pi = \mathbb{E}[S]\frac{1}{1-\kappa}. \qquad (2.3.2.3)$$

Očito su (2.3.2.1) i (2.3.2.3) ekvivalentni za $\alpha = \frac{\kappa}{1-\kappa}$.

Prema *principu varijance*, neto premija iznosi:

$$\Pi = \mathbb{E}[S] + \lambda\mathbb{V}ar[S], \qquad (2.3.2.4)$$

gdje je λ ($\lambda > 0$) dani intenzitet. Sigurnosni trošak, $\lambda\mathbb{V}ar[S]$, je proporcionalan varijanci. Vidi se da (2.3.2.4) zahtijeva više podataka od onih potrebnih za izračun premije ekvivalencije, što nije bio slučaj kod principa očekivane vrijednosti. Koje su to informacije potrebne kako bi se uvelo pravilo (2.3.2.4) vidi se iz raspisa varijance.

$$\mathbb{V}ar[S] = \mathbb{E}[S^2] - (\mathbb{E}[S])^2 \tag{2.3.2.5}$$

Raspišimo prvo $\mathbb{E}[S^2]$ kako bismo dobili (2.3.2.6):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S^2] &= \textstyle\sum_{h=1}^{\infty} \Pi_h \mathbb{E}[S^2|N=h] \\ &= \textstyle\sum_{h=1}^{\infty} \Pi_h \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{h} Y_i\right)^2 \middle| N=h\right] \\ &= \textstyle\sum_{h=1}^{\infty} \Pi_h \left(\sum_{i=1}^{h} \mathbb{E}[Y_i^2|N=h] + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j:j\neq i}^{h} \mathbb{E}[Y_i Y_j|N=h]\right)\end{aligned}$$

Zbog nezavisnosti Y_i i N, $\mathbb{E}[Y_i^2|N=h] = \mathbb{E}[Y_i^2]$, ∀i i $\mathbb{E}[Y_i\, Y_j|N=h] = \mathbb{E}[Y_i\, Y_j]$, ∀i,$j$. Zbog međusobne nezavisnosti $\mathbb{E}[Y_i\, Y_j] = \mathbb{E}[Y_i]\,\mathbb{E}[Y_j]$, ∀i,$j$. Zbog jednake distribuiranosti $\mathbb{E}[Y_i^2] = \mathbb{E}[Y_1^2]$, ∀i i $\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[Y_1]$, ∀i.

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned}\mathbb{E}[S^2] &= \textstyle\sum_{h=1}^{\infty} \Pi_h h \mathbb{E}[Y_1^2] + \sum_{h=1}^{\infty} \Pi_h h(h-1)(\mathbb{E}[Y_1])^2 \\ &= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y_1^2] + \mathbb{E}[N(N-1)](\mathbb{E}[Y_1])^2 \\ &= \mathbb{E}[N]\mathbb{V}ar[Y_1] + \mathbb{E}[N^2](\mathbb{E}[Y_1])^2 \end{aligned} \tag{2.3.2.7}$$

Dakle,

$$\mathbb{V}ar[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{V}ar[Y_1] + \mathbb{V}ar[N](\mathbb{E}[Y_1])^2. \tag{2.3.2.8}$$

Stoga, kako bi se implementiralo pravilo (2.3.2.4) treba se procijeniti očekivana frekvencija štete $\mathbb{E}[N]$ i očekivana težina štete $\mathbb{E}[Y_1]$, što je potrebno i za premiju ekvivalencije. Nadalje, treba procijeniti varijancu frekvencije štete, $\mathbb{V}ar[N]$ i varijancu težine štete, $\mathbb{V}ar[Y_1]$.

Prema *principu standardne devijacije,* neto premija iznosi:

$$\Pi = \mathbb{E}[S] + \beta\sqrt{\mathbb{V}ar[S]}, \tag{2.3.2.9}$$

Gdje je β ($\beta > 0$) dan udio, uz uvjet $\beta = \lambda\sqrt{\mathbb{V}ar[S]}$.

<u>*Primjer 2.3.2.1*</u> Pretpostavimo $\mathbb{E}[S] = 1.30$ i da je $\mathbb{V}\mathrm{ar}[S] = 13$. Premija ekvivalencije je $P = \mathbb{E}[S] = 1.30$. Zatim pretpostavimo da je neto premija: $\Pi = 1.40$. Sigurnosni trošak je tada $\Pi - P = 0.10$. Ta vrijednost alternativno se mogla dobiti na sljedeći način:

i. Kroz princip očekivane vrijednosti uzimajući $\alpha = 7.692\%$ ili $\kappa = 7.143\%$,
ii. Kroz princip varijance uzimajući $\lambda = 0.00769$,
iii. Kroz princip standardne devijacije uzimajući $\beta = 2.774\%$. □

Prema *principu postotka*, neto premija Π mora biti takva da

$$\mathbb{P}\,[S > \Pi] = \varepsilon. \tag{2.3.2.10}$$

Slučaj $S > \Pi$ predstavlja situaciju (ekonomskog) gubitka osiguravatelju, stoga je ε, ($\varepsilon > 0$), prihvaćena vjerojatnost gubitka. Kako bi primijenili (2.3.2.10) vjerojatnosna distribucija od S mora biti zadana.

2.3.3 Bruto premija

Troškovi naplaćeni polici neživotnog osiguranja sadrže:

i. Početnu proviziju $\Theta^{[A]}$,
ii. Administrativne i ostale troškove $\Theta^{[G]}$,
iii. Troškove spora potraživanja $\Theta^{[S]}$.

Troškovi mogu biti fiksni ($\Theta^{[A]}$, $\Theta^{[G]}$) ili varijabilni ($\Theta^{[S]}$) i u potonjem slučaju njihova količina može ovisiti o broju potraživanja, iznosu premija ili o iznosu potraživanja. Pod pretpostavkom da je neto premija izračunata prema principu očekivane vrijednosti, bruto premija se definira na sljedeći način:

$$\Pi^{[T]} = \mathbb{E}[S] + \kappa\Pi^{[T]} + \Theta^{[A]} + \Theta^{[G]} + \Theta^{[S]}\,\mathbb{E}[N], \tag{2.3.3.1}$$

gdje je κ proporcija sigurnosnih troškova, primijenjena na premiju troškova (umjesto na neto premiju). Ukoliko su troškovi spora potraživanja sadržani u cijeni svih potraživanja, onda je $\Theta^{[S]} = 0$.

Koristeći (2.3.1.3) imamo:

$$\Pi^{[T]} = \mathbb{E}[\mathrm{S}]\,\frac{1+\frac{\Theta^{[\mathrm{S}]}}{\mathbb{E}[Y_1]}}{1-\kappa} + \frac{\Theta^{[\mathrm{A}]}+\Theta^{[\mathrm{G}]}}{1-\kappa} \tag{2.3.3.2}$$

Definiranjem $\delta = \frac{1+\frac{\Theta^{[\mathrm{S}]}}{\mathbb{E}[Y_1]}}{1-\kappa}$ i $e = \frac{\Theta^{[\mathrm{A}]}+\Theta^{[\mathrm{G}]}}{1-\kappa}$ dobiva se formula gubitka:

$$\Pi^{[T]} = \delta\, \mathbb{E}[S] + e\,. \tag{2.3.3.3}$$

Parametri δ i e trebaju reflektirati razne troškove, kao i udio sigurnosnih troškova.

Primjer 2.3.3.1 Pretpostavimo da je $\mathbb{E}[S] = 1.30$ i $\mathbb{E}[N] = 0.13$. Neka premija troškova bude $\Pi^{[T]} = 1.50$. Takav iznos se mogao dobiti uzimajući:

i. Udio sigurnosnih troškova $\kappa = 7\%$,
ii. Inicijalne i administrativne troškove $\Theta^{[A]} + \Theta^{[G]} = 0.0924$,
iii. Troškove spora potraživanja $\Theta^{[S]} = 0.02$.

Dobije se $\delta = 1.07742$ (udio očekivanog iznosa agregatnog potraživanja) i $e = 0.10$ (fiksan iznos). $\square$

2.4 Statističke procjene

Cilj ovog odjeljka je procijeniti očekivanu frekvenciju potraživanja $\mathbb{E}[\mathrm{N}]$, očekivanu težinu potraživanja $\mathbb{E}[Y_1]$ i zatim očekivanu ukupnu isplatu police $\mathbb{E}[\mathrm{S}]$. Pretpostavlja se da su sve police trajanja od jedne godine. Podaci o potraživanjima se mogu sakupljati ili na kalendarskoj bazi ili na bazi godine dana trajanja police, što će biti naglašeno.

2.4.1 Homogeni portfelj

Neka se homogeni portfelj sastoji od r polica (ili osiguranih rizika), svih izdanih u isto vrijeme i svih s trajanjem od jedne godine. Homogenost polica znači da su slične u pogledu na vrstu rizika koji pokrivaju (npr. osiguranje od požara), uvjeta police (samopridržaji, osigurana vrijednost), sklonost izazivanja potraživanja, moguće težine potraživanja itd. Podaci o potraživanjima su prikupljeni na bazi godine police. Neka tijekom godine police, police prijavljuju ukupno z potraživanja, $z \leq r$ ili $z \geq r$, s iznosima potraživanja y_1, y_2, ..., y_z. Dakle, z potraživanja je prijavljeno u portfelju, ali ne znamo koje police su prijavile koja potraživanja.

Premija rizika Q je prosječni iznos potraživanja po polici:

$$Q = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_z}{r}. \tag{2.4.1.1}$$

Ukoliko svaka polica plaća (neto) premiju $\Pi = Q$, tada će osiguravatelj biti u ravnoteži, jer će ukupna količina uplata rQ biti jednaka količni isplata $y_1 + y_2 + \ldots + y_z$. Količina Q daje procjenu od $\mathbb{E}[\mathrm{S}]$.

Definira se *prosječan broj potraživanja po polici* $\bar{n}$, te *prosječan iznos potraživanja* $\bar{y}$:

$$\bar{n} = \frac{z}{r}, \tag{2.4.1.2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_z}{z}. \tag{2.4.1.3}$$

Očito $\bar{n}$ izražava procjenu $\mathbb{E}[\mathrm{N}]$, dok $\bar{y}$ daje procjenu $\mathbb{E}[Y_1]$. Stoga Q daje procjenu $\mathbb{E}[\mathrm{S}]$:

$$Q = \bar{n} * \bar{y}. \tag{2.4.1.4}$$

Neka je dalje z_{max} maksimalan broj potraživanja prijavljenih od strane jedne police (očito $z_{max} \leq z$) i r_h broj polica koje prijavljuju h potraživanja (h = 0, 1, ... , z_{max}). Broj polica se može razdvojiti na sljedeći način:

$$r = r_0 + r_1 + \cdots + r_{z_{max}}. \tag{2.4.1.5}$$

Broj potraživanja se može zapisati kao:

$$z = r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \cdots + z_{max} r_{z_{max}}. \qquad (2.4.1.6)$$

Prosječan broj potraživanja se tada može faktorizirati na sljedeći način:

$$\bar{n} = \frac{z}{r} * \frac{r - r_0}{r - r_0} \Longrightarrow \bar{n} = \frac{r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \cdots + z_{max} r_{z_{max}}}{r_1 + \cdots + r_{z_{max}}} * \left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \qquad (2.4.1.7)$$

Prvi omjer predstavlja prosječan broj potraživanja po polici prijavljenih potraživanja, zagrada predstavlja prosječnu učestalost barem jednog potraživanja. Zanimljivo je pročitati (2.4.1.7) kao statističku procjenu od $\mathbb{E}[N]$ prikladno izraženu.

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{+\infty} n * \mathbb{P}[N = n] = \sum_{n=1}^{+\infty} n * \mathbb{P}[N = n] \qquad (2.4.1.8)$$

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[N | N = 0] * \mathbb{P}[N = 0] + \mathbb{E}[N | N \geq 1] * \mathbb{P}[N \geq 1] \qquad (2.4.1.9)$$

Kako je $\mathbb{E}[N | N = 0] = 0$, vrijedi

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[N | N \geq 1] * \mathbb{P}[N \geq 1]. \qquad (2.4.1.10)$$

Jednadžba (2.4.1.7) daje informacije o koncentraciji potraživanja na nekoliko polica i zatim o prihvatljivosti pretpostavki nezavisnosti na kojima se temelji (2.3.1.3).

Za dani prosječni broj potraživanja $\bar{n}$, što je veći omjer $\frac{r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \cdots + z_{max} r_{z_{max}}}{r_1 + \cdots + r_{z_{max}}}$, to je

veća koncentracija potraživanja na nekoliko polica, pa stoga treba provjeriti pretpostavke nezavisnosti, budući da korelacijski efekti mogu biti prisutni kada polica prijavi više potraživanja.

Primjer 2.4.1.1 U Tablica 2.4.1.1 oba portfelja se sastoje od 100 000 polica i prijavljen je jednak broj potraživanja. Portfelj B ima veću koncentraciju potraživanja na nekoliko polica, za razliku od portfelja A. Stoga bi kod portfelja B trebalo napraviti dodatna istraživanja prije prihvaćanja pretpostavki o nezavisnosti. □

2.4.2 Heterogeni portfelj

Premija rizika definirana s (2.4.1.1) zahtijeva da su police homogene u odnosu na osiguranu vrijednost, vrijeme unosa i trajanje. U tim okolnostima, da bi se dobio prosječan iznos potraživanja, jednostavno se podijeli ukupna isplata portfelja s brojem polica. Sada se postavlja pitanje kako izmjeriti prosječan iznos potraživanja ako su osigurane vrijednosti drugačije.

	oba portfelja	
broj polica	100 000	
broj potraživanja	13 000	
ukupan iznos potraživanja	13 000 000	
	portfelj A	**portfelj B**
premija rizika	130	130
prosječan iznos potraživanja	1000	1000
prosječan broj potraživanja	0,13	0,13
prosječan broj potraživanja po polici sa potraživanjima	1,08	1,8
prosječna učestalost bar jednog potraživanja	0,118	0,072

Tablica 2.4.1.1 Iskustvo potraživanja u portfeljima A i B, izvor [1, str. 412]

Neka su $V'^{(1)}, V'^{(2)}, \dots, V'^{(r)}$ osigurane vrijednosti od r polica (za koje i dalje pretpostavljamo istu vrstu pokrića, isto vrijeme izdavanja i istu duljinu trajanja). Što je veća osigurana vrijednost $V'^{(j)}$, to bi trebao biti viši iznos potraživanja očekivan od police. Prosječan iznos potraživanja se onda mjeri na sljedeći način:

$$\Theta = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_z}{V'^{(1)} + V'^{(2)} + \dots + V'^{(r)}}, \qquad (2.4.2.1)$$

tj. kao prosječan iznos potraživanja po jedinici osigurane vrijednosti. Razumno je očekivati da će police sa višim osiguranim vrijednostima plaćati višu premiju. Stoga, ako se Θ shvati kao *stopa premije*, iznos premije za policu j bi tada bio $\theta V'^{(j)}$. Tada se ukupni iznos uplata osiguravatelju podudara s ukupnim iznosom isplata osiguravatelja:

$$\Theta(V'^{(1)} + V'^{(2)} + \dots + V'^{(r)}) = y_1 + y_2 + \dots + y_z. \qquad (2.4.2.2)$$

Prosječna osigurana vrijednost definirana je sa:

$$\overline{V'} = \frac{V'^{(1)} + V'^{(2)} + \dots + V'^{(r)}}{r}. \qquad (2.4.2.3)$$

Stopa premije θ se tada može raspisati na sljedeći način:

$$\Theta = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_z}{V'^{(1)} + V'^{(2)} + \dots + V'^{(r)}} * \frac{r}{z} * \frac{z}{r} = \frac{\bar{y}}{\overline{V'}} * \bar{n} = \frac{Q}{\overline{V'}}. \qquad (2.4.2.4)$$

Količina $\bar{y}/\bar{V}'$ se naziva *prosječan stupanj potraživanja*. Količina $Q = \bar{n} * \bar{y}$ i dalje izražava prosječan iznos potraživanja po polici. No, zbog različitih osiguranih vrijednosti, takva informacija nije prikladna niti za određivanje cijena niti za određivanje troškova traženih potraživanja.

2.4.3 Broj izloženih riziku

Iako se do sada pretpostavljalo da su police izdane (ili obnovljene) u isto vrijeme, iz iskustva se zna da su vremena izdavanja (ili obnove) različita. Stoga su i godine trajanja polica različite. Dakle, jednostavnije je prikupiti podatke o potraživanjima na bazi kalendarske godine i to je ono što će se od sada pa nadalje pretpostavljati. Druga posljedica drugačijih vremena izdavanja (ili obnove) je sljedeća: kada je godina trajanja police jednaka za sve police, broj polica koje su na snazi u dano vrijeme (recimo, pri izdavanju) također predstavlja broj polica koje su sve skupa na snazi tijekom promatrane godine. To ne vrijedi kada police imaju različita vremena izdavanja ili obnove. U ovom odjeljku, raspravlja se o tome kako odrediti nazivnik od Q kada police imaju drugačije godine trajanja.

Neka je $y_1 + y_2 + ... + y_z$ ukupna isplata za portfelj u danoj kalendarskoj godini. *Broj izloženih riziku* (ili broj godina police) zovemo ukupno provedeno vrijeme koje su police na snazi provele u portfelju u promatranoj kalendarskoj godini.

Primjer 2.4.3.1 Neka je jedna polica izdana 1. srpnja, a druga polica 1. veljače godine t. Tada polica izdana 1. srpnja ostaje u portfelju pola godine tijekom godine t (i pola godine tijekom godine $t+1$), dok polica izdana 1. veljače provodi 11 mjeseci u portfelju godine t (i jedan mjesec u godini $t+1$).
Broj izloženih riziku tijekom godine t je tada $6/12 + 11/12 = 17/12$. □

Primjer 2.4.3.2 Metoda dvadesetčetvrtine za aproksimaciju broja izloženih riziku. U Tablica 2.4.3.1 su dani podaci o broju polica prema periodu izdavanja ili obnove. Pretpostavlja se da traju godinu dana i da toliko ostaju u portfelju. Također, pretpostavlja se da je svaka polica izdana (ili obnovljena) u sredini mjeseca. Stoga se godina dijeli na 24 perioda. Neka 0 bude 1. Siječnja. Tada su vremena mogućeg izdavanja (ili obnove): 1, 3, ... , 23. Iz Tablice 2.4.3.1 se vidi da su 74 police izdane (ili obnovljene) u siječnju (tj. u vremenu 1) godine $t-1$. Dakle, provedu 23 (od 24) perioda u portfelju u godini $t-1$ i 1 (od 24) perioda u godini t. U veljači (tj. u vrijeme 3) godine $t-1$ je izdano (ili obnovljeno) 89 polica. One provedu 21 period (od 24) u godini $t-1$ i 3 (od 24) u godini t. U prosincu (tj. u vrijeme 23) godine t izdano je (ili obnovljeno) 80 polica. One provedu u portfelju 1 period (od 24) u godini t i 23 perioda (od 24) u godini $t+1$. Ukupno vrijeme koje police provedu u portfelju unutar godine t (broj godina police u godini t) se može izračunati na sljedeći način:

$$74 * \frac{1}{24} + 89 * \frac{3}{24} + \cdots + 70 * \frac{23}{24} + 75 * \frac{23}{24} + 82 * \frac{21}{24} + \cdots + 80 * \frac{1}{24} = 1003.96 \,. \qquad \square$$

U slučaju da su podaci dostupni kvartalno, metoda se zove metoda osmine budući da je godina podijeljena u 8 perioda. Ako su podaci dostupni na dvomjesečnoj bazi, godina će tada biti podijeljena u 12 perioda i metoda će se zvati metoda dvanaestine.

	Broj polica	
Mjesec	**godina t-1**	**godina t**
1/1-31/1	74	75
1/2-28/2	89	82
1/3-31/3	82	87
1/4-30/4	69	75
1/5-31/5	81	75
1/6-30/6	95	90
1/7-31/7	98	95
1/8-31/8	79	83
1/9-30/9	85	90
1/10-31/10	93	90
1/11-30/11	90	98
1/12-31/12	70	80

Tablica 2.4.3.1 Broj polica prema periodu izdavanja ili obnove, izvor [1, str. 414]

<u>*Primjer 2.4.3.3*</u> *Metoda popisa* za aproksimaciju broja izloženih riziku. U Tablica 2.4.3.2 su dani podaci o broju polica na snazi u godini t, u nekim određenim datumima. Pretpostavlja se da traju godinu dana i da toliko ostaju u portfelju. Prvo se računa prosječan broj polica na snazi svaki mjesec, kako je prikazano u Tablica 2.4.3.3 . Svaka od grupa polica prikazanih u Tablica 2.4.3.3 provodi u prosjeku jedan mjesec u portfelju. Stoga, broj godina trajanja police se može izračunati na sljedeći način:

$$1260 * \frac{1}{12} + 1362.50 * \frac{1}{12} + \cdots + 1775 * \frac{1}{12} = 1477.50 \,.$$

Rezultat je jednak prosječnom broju polica na snazi u svakom mjesecu, budući da je pretpostavljeno kako svaka grupa polica provede isto vrijeme (tj. jedan mjesec) u portfelju. $\square$

Vrijeme	Broj polica na snazi	Vrijeme	Broj polica na snazi
1.1.	1200	1.8.	1350
1.2.	1320	1.9.	1500
1.3.	1405	1.10.	1650
1.4.	1380	1.11.	1700
1.5.	1300	1.12.	1800
1.6.	1400	31.12.	1750
1.7.	1450		

Tablica 2.4.3.2 Broj polica na snazi u godini t, u određenim datumima, na mjesečnoj bazi, izvor [1, str. 415]

Mjesec	Prosječan broj polica na snazi
1/1-31/1	(1200+1320)/2=1260.00
1/2-28/2	(1320+1405)/2=1362.50
1/3-31/3	(1405+1380)/2=1392.50
1/4-30/4	(1380+1300)/2=1340.00
1/5-31/5	(1300+1400)/2=1350.00
1/6-30/6	(1400+1450)/2=1425.00
1/7-31/7	(1450+1350)/2=1400.00
1/8-31/8	(1350+1500)/2=1425.00
1/9-30/9	(1500+1650)/2=1575.00
1/10-31/10	(1650+1700)/2=1675.00
1/11-30/11	(1700+1800)/2=1675.00
1/12-31/12	(1800+1750)/2=1775.00

Tablica 2.4.3.3 Prosječan broj polica na snazi svaki mjesec, na mjesečnoj bazi, izvor [1, str. 416]

2.4.4 Premija iskustva

Skup podataka koji izražava iskustvo potraživanja osiguravatelja u danom portfelju može biti neadekvatan za određivanje cijena zbog jednog od navedenih razloga:

i. Nema dovoljno podataka i uzorak promatranih potraživanja se smatra premalenim,
ii. Kretanje potraživanja nije stabilno u vremenu, ali se razvija prema nekom trendu (za kojega je moguće da je nepoznat).

U prvom slučaju podaci za izračun premije se obično dobivaju iz drugih portfelja (moguće od onih koji pripadaju drugim osiguravateljima), uzimajući u obzir da imaju slična svojstva s originalnim portfeljem. U drugom slučaju iskustvo bi moglo biti dovoljno bogato, ali zbog trenda, promatrani podaci daju stare informacije. Prikladne promjene su potrebne prije nego li se ti podaci mogu koristiti za procjenjivanje budućih potraživanja. U nastavku je ilustrirana ideja ažuriranja premije u skladu s novim iskustvom u portfelju.

Neka je osiguravatelj izdao portfelj, dakle ne postoje podaci o prethodnim potraživanjima. Kako bi postavio premiju, *referentna populacija* mora biti odabrana. To je populacija koja je već dosegla stabilno stanje s obzirom na iskustvo potraživanja te time može dati pouzdane podatke. Obično je referentna populacija portfelj drugog osiguravatelja koji se bavi istim ili sličnim pokrićima. U ovom odjeljku se pretpostavlja da su police homogene u odnosu na osiguranu vrijednost i da je prikladna jedinica izloženosti broj godina trajanja police.

Neka 0 bude vrijeme kada je novi portfelj izdan i neka je Q_0 premija rizika u referentnoj populaciji. Budući da je Q_0 jedina dostupna informacija, premija (ekvivalencije) za novi portfelj je jednostavno zadana kao:

$$P_0 = Q_0. \tag{2.4.4.1}$$

U vremenu 1, novi portfelj je dobio neko iskustvo. Neka Q_1 bude prosječan trošak potraživanja promatran u vremenskom intervalu $(0,1)$. U vrijeme 1, osiguravatelj mora odlučiti kako će postaviti premiju za sljedeću godinu, recimo P_1. Postoje tri mogućnosti:

i. Premija se ne mijenja, tj. $P_1 = P_0$,
ii. Premija se mijenja, no uzima u obzir samo nove informacije, tj. $P_1 = Q_1$,
iii. Premija se mijenja prema novom iskustvu, ali i dalje uzima u obzir početne informacije.

Kod prvog izbora uspoređujući Q_0 s Q_1 možemo uočiti neke različitosti između iskustva potraživanja novog portfelja i referentne populacije koje bi bilo bolje ne zanemariti. S druge strane, drugi izbor ima nedostatak da Q_1 može ispasti posebice visok ili nizak, zbog slučajnosti (portfelj još nije dovoljno velik). Treći izbor predstavlja međurješenje. Dobar način za postavljanje premije za drugu godinu, tj. u vrijeme 1 je:

$$P_1 = \alpha_1 Q_1 + (1 - \alpha_1) Q_0, \tag{2.4.4.2}$$

gdje je α_1, $0 < \alpha_1 < 1$, udio koji izražava težinu (važnost) novih informacija. Slučajevi $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_1 = 1$ su izbačeni, budući da odgovaraju gore navedenom prvom i drugom izboru. Razumno α_1 je bliže nuli nego jedinici, budući da iskustvo stečeno u novom portfelju još nije stabilno. U vremenu 2, prosječni trošak potraživanja se može odrediti na temelju iskustva stečenog u (0,2). Neka Q_2 označava omjer (2.4.1.1) baziran na podacima prikupljenim u (0,2). Takva količina sadrži šire iskustvo od Q_1, ali je i dalje izložena većim fluktuacijama od Q_0, budući da je iskustvo osiguravatelja manje bogato od onog koje se odnosi na referentnu populaciju. Premija ekvivalencije u vrijeme 2 je postavljena na sljedeći način:

$$P_2 = \alpha_2 Q_2 + (1 - \alpha_2) Q_0, \tag{2.4.4.3}$$

gdje je α_2 nova težina dodana iskustvu portfelja. Razumno tome $\alpha_2 > \alpha_1$, ali još uvijek $0 < \alpha_2 < 1$. Općenito, razumno pravilo za postavljanje premije u vrijeme t je:

$$P_t = \alpha_t Q_t + (1 - \alpha_t) Q_0, \tag{2.4.4.4}$$

gdje je Q_t prosječan trošak potraživanja unutar novog portfelja u periodu $(0, t)$ i α_t je težina dodijeljena vremenu t uz tu informaciju. Stoga, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_t \leq 1$.

Napomena: Omjer Q se može odnositi na širi vremenski raspon od jedne godine. Prednost povećanja vremenskog intervala promatranja je u tome što se skup podataka povećava. Nedostaci su što iznosi potraživanja mogu biti predmet inflacije, homogenost portfelja se može oslabiti dodavanjem novih unosa, učestalost potraživanja može biti podložna promjenama u vremenu.

Premija izračunata preko (2.4.4.4) se zove *premija iskustva*. Formula (2.4.4.4) je primjer *modela kredibiliteta* u kojem se informacije prikupljene iz nekog vanjskog izvora postepeno spajaju s onima prikupljenim na određenoj populaciji. Koeficijent α_t se zove *faktor kredibiliteta* i izražava relativnu pouzdanost (ili *kredibilitet*) određene informacije. Što je širi volumen određenih podataka u odnosu na volumen podataka prikupljenih iz vanjskog izvora to je veći kredibilitet dodijeljen ovom prvom. Odnos:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_t < \cdots \tag{2.4.4.5}$$

izražava povećanje prihvaćanja kredibiliteta za određeno iskustvo u odnosu na doživljeno u sklopu referentne populacije. Kada je $\alpha_t = 1$, *puni kredibilitet* je dosegnut i informacije dobivene od vanjskog izvora mogu biti zanemarene.

Kao što je navedeno, prosječni trošak potraživanja Q (Q_t u gornjoj raspravi) predstavlja procjenu očekivane ukupne količine potraživanja po polici, $\mathbb{E}[S]$. Jedna ideja je da je Q_t punog kredibiliteta kada je vjerojatnost da je Q_t dovoljno blizu pravoj vrijednosti ukupne količine potraživanja na visokoj razini (recimo 0.95). Dakle, zahtijeva se:

$$\mathbb{P}[\,(1 - a) Q_t < S \leq (1 + a) Q_t] = \varepsilon, \tag{2.4.4.6}$$

gdje a određuje širinu pojasa oko S (a bi trebao biti malen, npr. 0.01), i ε je tražena razina vjerojatnosti (npr. 0.95).

2.5 Stohastičko modeliranje ukupnog iznosa potraživanja

Većina dosadašnje rasprave pretpostavlja da se osiguravatelj može osloniti na prikladni skup podataka. U tom slučaju procjene se mogu bazirati na empirijskoj distibuciji ukupnog iznosa potraživanja. U nekim situacijama izračuni su mogući samo ako je usvojen teorijski model za slučajnu varijablu S. Mora se naglasiti da pretpostavke oko vjerojatnosne distribucije od S ne mogu biti izbjegnute, čak i kad radimo s empirijskim distribucijama. Kada je teorijska distribucija uvedena, nekoliko pretpostavki je prihvaćeno. Svaka pretpostavka implicira neka pojednostavljenja koja vode do zastupanja koja mogu odstupati od stvarnih situacija. Nadalje, bavljenje teorijskim distribucijama zahtjeva određenu analitičku vještinu. No, svojstva teorijskih distribucija olakšavaju analizu mnogih problema ili ih čine uopće mogućima. Nadalje, teorijska distribucija sadrži mali broj parametara, dok empirijska distribucija zahtijeva veliku količinu podataka.

2.5.1 Modeliranje broja potraživanja

Ako polica može prijaviti najviše jedno potraživanje tijekom perioda pokrića, onda N ima Bernoullijevu distribuciju, tj. :

$$N = \begin{cases} 0 & s\ vjerojatnošću\ 1-p \\ 1 & s\ vjerojatnošću\ p \end{cases}. \tag{2.5.1.1}$$

gdje je p vjerojatnost potraživanja. Prisutan je samo jedan parametar, p, koji se određuje kroz prosječan broj potraživanja $\bar{n}$.

Ukoliko polica može prijaviti više od jednog potraživanja postaje upitno jesu li ta potraživanja nezavisna ili nisu. Pretpostavka nezavisnosti je razumna kada su potraživanja prijavljena od različitih polica. No, u ovom slučaju se misli na jednu policu, pa neki oblik korelacije među potraživanjima može biti prisutan. Unatoč tome, i dalje se radi uz pretpostavku nezavisnosti potraživanja.

Neka je maksimalan broj potraživanja po polici n_{max} i neka svako potraživanje ima jednaku vjerojatnost p da se dogodi. Tada N ima binomnu distribuciju, tj. :

$$\mathbb{P}[N=n] = \binom{n_{max}}{n} p^n (1-p)^{n_{max}-n}, \tag{2.5.1.2}$$

gdje su n_{max} i p pripadni parametri. Izbor n_{max} ovisi o uvjetima police, dok se p opet može odrediti kroz prosječan broj potraživanja $\bar{n}$. Po očekivanju binomne distribucije vrijedi $\mathbb{E}[N] = pn_{max}$, pa omjer $\bar{n}/n_{max}$ daje procjenu za p.
Zna se da je binomnu distribuciju s parametrima n_{max}, p dobro aproksimirala Poissonova razdioba s parametrom $\lambda = pn_{max}$, $\lambda > 0$, gdje je n_{max} dovoljno velik, a p dovoljno malen. Poissonov zakon je izvorno razvijen za rijetke događaje. Kako u neživotnom osiguranju većina osiguranih rizika ima malu vjerojatnost potraživanja, nije iznenađujuće da je Poissonov zakon prikladniji od binomnog. U Poissonovom zakonu n_{max} ne treba biti unaprijed izražen, te vrijedi $\mathbb{E}[N] = \mathbb{V}ar[N] = \lambda$. Zakon glasi:

$$\mathbb{P}[\, N = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, n = 0, 1, \dots . \tag{2.5.1.3}$$

Neka je N_t broj potraživanja za policu u periodu od t godina ($t > 0$). U skladu s ranijom notacijom $N_1 = N$ kada je $t = 1$. Ako su potraživanja međusobno nezavisna iz $N \sim Poi(\lambda)$ slijedi $N_t \sim Poi(\lambda t)$, jer je zbroj nezavisnih slučajnih Poissonovih varijabli opet slučajna Poissonova varijabla, čiji je parametar zbroj parametara početnih slučajnih varijabli. Ako je N ~ Poi(λ) za bilo koju policu u portfelju i ako su potraživanja prijavljena od drugih polica nezavisna, tada je $N^{[P]} \sim Poi(\lambda r)$ (gdje je $N^{[P]}$ ukupan broj potraživanja u portfelju unutar jedne godine, a *r* je broj godina police za tu godinu). Općenitije, ako je $N^{[j]} \sim Poi(\lambda^{(j)})$ broj potraživanja prijavljenih od police j u jednoj godini, tada je broj potraživanja prijavljenih unutar portfelja:

$$N^{[P]} \sim Poi(\textstyle\sum_{j=1}^{r} \lambda^{(j)}).$$

<u>*Primjer 2.5.1.1*</u> Neka je $N \sim Poi(0.13)$ broj potraživanja za policu unutar jedne godine. Tada je $N^{[P]} \sim Poi(13\,000)$ broj potraživanja u jednoj godini za 100 000 homogenih i nezavisnih polica. Podijelimo godinu na četiri dijela i pretpostavimo da su brojevi potraživanja u svakom dijelu međusobno nezavisni i jednako distribuirani. Tada je:

$$N_{0.25}^{[P]} \sim Poi(3250).$$

Kada znamo distribuciju broja potraživanja možemo izračunati vjerojatnost da polica neće prijaviti potraživanje u jednoj godini, tj. $P(N = 0) = e^{-0.13} = 0.878$. Vjerojatnost da portfelj koji se sastoji od 100 000 nezavisnih homogenih polica ne prijavi niti jedno potraživanje u jednoj godini je $\mathbb{P}[N^{[P]} = 0] = e^{-13\,000} \approx 0$. Vjerojatnost da portfelj prijavi $13\,000 = \mathbb{E}[N^{[P]}]$ potraživanja u jednoj godini $\mathbb{P}[N^{[P]} = 13000] = 0.00364$. □

Parametar λ u (2.5.1.3) predstavlja očekivani broj potraživanja po polici $\mathbb{E}[N] = \lambda$, stoga se procjenjuje sa $\bar{n}$. Realističnije, za neke police treba očekivati učestalost potraživanja veću od $\bar{n}$, dok za druge vrijedi obrnuto. Stoga se pretpostavlja da je parametar λ Poissonove razdiobe slučajan. Obično se pretpostavlja da λ prati Gamma distribuciju, s parametrima $(\rho, p/(1-p))$. Tada N prati Negativnu Binomnu distribuciju:

$$\mathbb{P}[N=n] = \frac{\Gamma(\rho+n)}{n!\Gamma(\rho)} p^{\rho}(1-p)^{n}, \tag{2.5.1.4}$$

gdje je $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}\, e^{-t} dt$ Gamma funkcija, a ρ i p su parametri Negativne Binomne distribucije ($0 < p < 1$ i $\rho > 0$). Za razliku od Poissonove razdiobe (gdje je $\mathbb{V}ar[N] = \mathbb{E}[N]$), Negativna Binomna dopušta $\mathbb{V}ar[N] > \mathbb{E}[N]$.

	empirijska distribucija		**Poissonova**	**Negativna Binomna**
# zahtjeva u godini	**# polica**	**frekvencija**	**vjerojatnost**	**vjerojatnost**
0	87897	0,87897	0,8781	0,87906
1	11263	0,11263	0,11415	0,11236
2	785	0,00785	0,00742	0,00812
3	53	0,00053	0,00032	0,00044
4	2	0,00002	0,00001	0,00002
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7 ili više	0	0	0	0
suma	100000	1	1	1
očekivanje		0,13	0,13	0,13
varijanca		0,13222	0,13	0,13222

Tablica 2.5.1.1 Portfelj A, izvor [1, str. 423]

	empirijska distribucija		**Poissonova**	**Negativna Binomna**
# zahtjeva u godini	**# polica**	**frekvencija**	**vjerojatnost**	**vjerojatnost**
0	88146	0,88146	0,87810	0,88152
1	10799	0,10799	0,11415	0,10788
2	973	0,00973	0,00742	0,00976
3	76	0,00076	0,00032	0,00078
4	4	0,00004	0,00001	0,00006
5	1	0	0	0
6	1	0	0	0
7 ili više	0	0	0	0
suma	100000	1	1	1
očekivanje		0,13	0,13	0,13
varijanca		0,1381	0,13	0,1381

Tablica 2.5.1.2 Portfelj B, izvor [1, str. 423]

*Primjer 2.5.1.*2 Tablica 2.5.1.1 i Tablica 2.5.1.2 navode empirijsku distribuciju broja potraživanja po polici i odgovarajuće Poissonove i Negativne Binomne distribucije. Negativna Binomna distribucija daje bolji prikaz u pogledu varijance i ekstremnih slučajeva. U portfelju A heterogenost polica nije velika tako da bi Poissonova aproksimacija mogla biti zadovoljavajuća, dok je za portfelj B potrebna Negativna Binomna distribucija.

2.5.2 Modeliranje težine potraživanja

Iz (2.3.1.3) slijedi da kako bi definirali vjerojatnosnu distribuciju ukupnog iznosa potraživanja, možemo odvojeno definirati vjerojatnosne distribucije broja potraživanja N i težine potraživanja Y_1.

Iako je skup mogućih vrijednosti za Y_1 ograničen, vjerojatnosne distribucije se obično definiraju na intervalu $[0, +\infty)$. Očito, u obzir se uzimaju neprekidne distribucije. Česti izbori su Gamma, Lognormalna, Pareto i Loggamma. Normalna distribucija se može pretpostaviti kao granični slučaj, ako vrijedi centralni granični teorem.

Primjer 2.5.2.1 Tablica 2.5.2.1 daje empirijsku distribuciju težine potraživanja za dani portfelj. Distribucija je očito asimetrična. Iz tablice se može odrediti vjerojatnost da je veličina potraživanja iznad 50 (53/13000 = 0,004077). Doduše, određene informacije nedostaju (npr. prosječan iznos potraživanja unutar svake klase).

veličina potraživanja	**#potraživanja**
0-5	3116
5-10	6446
10-20	2084
20-30	731
30-40	450
40-50	120
50 i više	53
Suma	13000
Očekivanje	10
Varijanca	76.38

Tablica 2.5.2.1 Empirijska distribucija težine potraživanja, izvor [1, str. 424]

2.5.3 Modeliranje agregatnog iznosa potraživanja

Ukupni iznos potraživanja S, definiran kroz (2.3.1.1), je funkcija stohastičnog procesa $\{N, Y_1, Y_2, \dots\}$. Za S se pretpostavlja složena distribucija. Konkretno, ako N ima

Poissonovu distribuciju, tada S ima složenu Poissonovu distribuciju. Ako N ima Negativnu Binomnu distribuciju, tada S ima složenu Negativnu Binomnu distribuciju.

Neka se traži $\mathbb{P}[S > s]$, gdje je s zadani prag. Neka $F_S(s)$ bude funkcija distribucije od S, odnosno $F_S(s) = \mathbb{P}[S \leq s]$. Neka $F_{Y_1}(y)$ bude funkcija distribucije od Y_1, odnosno $F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}[Y_1 \leq y]$. Očito je da je $\mathbb{P}[S > s] = 1 - F_S(s)$. Imamo:

$$F_S(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[N = n] * \mathbb{P}[(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) \leq s | N = n]. \quad (2.5.3.1)$$

Uzimajući u obzir pretpostavke da su $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ nezavisni od N, međusobno nezavisni i jednakodistribuirani vrijedi (2.5.3.2):

$$\mathbb{P}[(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) \leq s | N = n] = \mathbb{P}[(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) \leq s] = F_{Y_1}^{*(n)}(s).$$

gdje je $F_{Y_1}^{*(n)}(s)$ n-ta konvolucija od $F_{Y_1}(y)$. Za n=0, konvencionalno se pretpostavlja da je $F_{Y_1}^{*(n)}(s)$ = 0 ako je $s < 0$ i $F_{Y_1}^{*(n)}(s)$ = 1 ako je $s \geq 0$. Zamjenom u (2.5.3.1) slijedi:

$$F_S(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[N = n] * F_{Y_1}^{*(n)}(s). \quad (2.5.3.3)$$

<u>*Primjer 2.5.3.1*</u> U izrazu (2.4.4.6) količina Q_t izražava procjenu od $\mathbb{E}[S]$. Stoga,

$$\mathbb{P}[(1 - a)\mathbb{E}[S] < S \leq (1 + a)\mathbb{E}[S]] = \varepsilon$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}\left[\frac{-a\mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathbb{V}ar[S]}} < \frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathbb{V}ar[S]}} \leq \frac{a\mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathbb{V}ar[S]}}\right] = \varepsilon, \quad (2.5.3.4)$$

gdje je $\frac{S-\mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathbb{V}ar[S]}}$ standardizirana slučajna varijabla.

Kada je uzorak velik, može se pretpostaviti da je $\frac{S-\mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathbb{V}ar[S]}} \sim AN(0,1)$.

Neka je a= 0.1 i ε = 0.95. Tada vrijedi:

$$\frac{0.1\,\mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathbb{V}ar[S]}} = 1.96 \Rightarrow \mathbb{E}[S] = 19.6\sqrt{\mathbb{V}ar[S]}\,. \quad (2.5.3.5)$$

Dakle, kada Q_t koji procjenjuje $\mathbb{E}[S]$ ispunjava (2.5.3.5), tada se iskustvu portfelja daje puni kredibilitet. Neka N ima Poissonovu distribuciju. Tada, $\mathbb{E}[N] = \mathbb{V}ar[N]$ mogu biti procijenjeni prosječnim brojem potraživanja $\bar{n}$. Iz (2.3.2.8) tada slijedi:

$$\mathbb{V}ar[S] = \mathbb{E}[N](\mathbb{V}ar[Y_1] + (\mathbb{E}[Y_1])^2) = \bar{n}(\sigma^2 + (\bar{y})^2). \qquad (2.5.3.6)$$

gdje σ^2 označava procjenu za $\mathbb{V}ar[Y_1]$. Kako je $\mathbb{E}[S] = \bar{n} * \bar{y}$ vrijedi:

$$\bar{n}\bar{y} = 19.6\sqrt{\bar{n}(\sigma^2 + (\bar{y})^2)} \Rightarrow \sqrt{\bar{n}} = 19.6\sqrt{\frac{\sigma^2}{(\bar{y})^2} + 1}\,. \qquad (2.5.3.7)$$

Dakle, dobiven je izraz za minimalni broj očekivanih potraživanja potrebnih za puni kredibilitet. □

(2.5.3.3) se odnosi samo na jednu policu. Neka $S^{(j)}$ bude ukupni iznos potraživanja za policu j i $S^{[P]}$ ukupni iznos potraživanja za portfelj. Tada je $S^{[P]} = S^{(1)} + S^{(2)} + \dots + S^{(r)}$, gdje je *r* broj polica. Ako su police međusobno nezavisne i ako $S^{(j)}$ ima složenu Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda^{(j)}$ i distribucijom potraživanja $F_{Y_1^{(j)}}(y)$, tada $S^{[P]}$ također ima složenu Poissonovu distribuciju, s parametrom $\lambda^{[P]} = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \dots + \lambda^{(r)}$ i distribucijom potraživanja $F_{Y_1}(y) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\lambda^{(j)}}{\lambda} F_{Y_1^j}(y)$.

<u>*Primjer 2.5.3.2*</u> Neka homogeni portfelj sadrži r polica koje predstavljaju nezavisne rizike. Svaka polica prijavi N potraživanja u godini, $N \sim Poi(0.13)$. Iznos potraživanja je fiksiran na 10, Y_1 tada ima degeneriranu distribuciju. Broj potraživanja u portfelju $N^{[P]}$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom 0.13 *r*. Ukupni iznos potraživanja za portfelj $S^{[P]}$ je jednostavno definiran kao $S^{[P]} = 10N^{[P]}$. Neka je $\Pi = 1.4$. Tada vjerojatnost da je ukupni iznos potraživanja veći od neto premije iznosi:

$$\mathbb{P}\left[S^{[P]} > r\Pi\right] = \mathbb{P}\left[N^{[P]} > \frac{r\Pi}{10}\right] = 1 - \mathbb{P}\left[N^{[P]} \le \frac{r\Pi}{10}\right].$$

Kako se broj polica r povećava, tako se vjerojatnost smanjuje.

2.6 Klasifikacija rizika i ocjena iskustva

Police za koje osiguravatelj pretpostavlja slična potraživanja se često grupiraju u *klasu rizika*. Tako su u osiguranju od požara zgrade klasificirane prema upotrebi (npr. domaćinstva, komercijalne zgrade, industrijske zgrade), lokaciji (npr. urbana, industrijska, ruralna područja), građevinskom materijalu (npr. cement, cigla, drvo), broju katova (npr. jedan, dva, tri, četiri, pet, šest ili više). Police za koje vrijede iste stope premije se grupiraju u *klasu premije*. Obično klasa premije ima manje nego klasa rizika. Definicija klasa rizika bazirana je na:

- *Faktorima rizika*, tj. svojstvima rizika koja dokazuju iskustvo potraživanja (u gornjem primjeru faktori rizika su: upotreba, lokacija, građevinski materijali i broj katova);
- *Ishodima svakog faktora rizika*, koji mogu biti ili kvalitativni ili kvantitativni (primjerice, mogući ishodi upotrebe kao faktora rizika su: domaćinstvo, komercijalna zgrada, industrijska).

Kao primjer diferenciranja stopa premija pri izdavanju, promatra se osiguranje od požara. Navedena su četiri faktora rizika:

- Upotreba, s $c_1 = 3$ moguća načina, tj. domaća, komercijalna, industrijska zgrada;
- Lokacija, s $c_2 = 3$ moguća načina, tj. urbano, industrijsko, ruralno područje;
- Građevinski materijal, s $c_3 = 3$ moguća načina, tj cement, cigla, drvo;
- Broj katova, s $c_4 = 6$ moguća načina, tj jedan, dva, tri, četiri, pet i šest ili više.

Kombiniranjem mogućih ishoda za četiri faktora rizika, definiraju se $c = c_1 * c_2 * c_3 * c_4 = 162$ klase rizika. U nastavku se pretpostavlja da se klase rejtinga poklapaju s klasama rizika. Kod izdavanja, polica je pridodana odgovarajućoj klasi rizika. Klasa rizika je određena ishodom svakog faktora rizika (npr. stambena zgrada (i) , locirana u urbanom području (j) , sagrađena od cigle (h) , s jednim katom (k) pripada klasi (i,j,h,k)). Iskustvo stečeno u klasi rizika (i,j,h,k) dozvoljava osiguravatelju da odredi premiju rizika $Q_{i,j,h,k}$ ili stopu premije rizika $\theta_{i,j,h,k}$ specifičnu za tu klasu rizika. Osiguravatelj može dalje sažeti prosječno iskustvo u portfelju kroz premiju rizika Q ili stopu premije rizika θ. Dok je stopa premije ista za sve police koje pripadaju istoj klasi rizika, iznos premije može biti drugačiji zbog drugačije osigurane vrijednosti.

Neka je $p_{i,j,h,k}$ stopa premije ekvivalencije za police u klasi rizika (i,j,h,k). Ta stopa treba biti određena kroz stopu premije rizika $\theta_{i,j,h,k}$. Doduše, zbog malog broja polica u nekim klasama, neke stope premije rizika $\theta_{i,j,h,k}$ mogu biti nepouzdane. Nasuprot tome, informacije dobivene od θ trebale bi biti dovoljno stabilne. Stoga je mudrije procijeniti $p_{i,j,h,k}$ kao funkciju od θ. Postoji linearno (2.6.1) i multiplikativno (2.6.2) pravilo:

$$p_{i,j,h,k} = \theta + a_i + b_j + d_h + g_k, \quad (2.6.1)$$

$$p_{i,j,h,k} = \theta\alpha_i\beta_j\delta_h\gamma_k. \quad (2.6.2)$$

Parametri a_i, b_j, d_h, g_k, te $\alpha_i, \beta_j, \delta_h, \gamma_k$ su takozvani *relativiteti*: oni određuju stopu premije klase prema svojstvima klase. Pravila (2.6.1) i (2.6.2) zahtijevaju manji broj parametara nego što bi bilo potrebno određivanjem $p_{i,j,h,k}$ kroz $\theta_{i,j,h,k}$.

Ukoliko je prihvaćen sistem individualnog ocjenjivanja iskustva, osiguravatelj je voljan smanjiti premiju za policu ako je njeno iskustvo potraživanja niže od prosjeka. S druge strane, osiguranik mora biti voljan prihvatiti maksimalni porast premije ako je iskustvo potraživanja iznad prosjeka. Takav dogovor je vrlo čest za osiguranje motornih vozila. Dakle, prema individualnom iskustvu, godinu za godinom stopa premije je povećana ili smanjena, tako da pri obnovi police bude korištena nova stopa premije.

Neka p_t bude stopa premije primijenjena na policu nakon t godina od izdavanja i neka p označava referentnu stopu premije, tipično predstavljajući stopu premije pri izdavanju. Preciznije, ako je p_{t-1} stopa premije primijenjena u vrijeme $t - 1$, tada je stopa premije u vrijeme t definirana kao:

$$p_t = f(p_{t-1}, n_t), \quad (2.6.3)$$

gdje je n_t broj potraživanja prijavljenih u godini $(t - 1, t)$, a f je rastuća funkcija od n_t. Navedeni sistem se zove *Bonus-Malus (BM)* sistem. Ponekad umjesto promjene stope premije, individualno iskustvo može rezultirati revizijom uvjeta police (npr. samopridržaj može biti smanjen ako ne dođe do potraživanja ili povećan u suprotnom slučaju).

Klasa rizika kojoj je rizik dodijeljen u odnosu na broj potraživanja koji su se dogodili prije ove godine se zove *klasa zasluga*. Stopa premije je promijenjena svake godine kao funkcija broja potraživanja prijavljenih u posljednjoj godini i trenutnoj klasi zasluga. Detaljnije, sljedeći su predmeti BM sistema:

i. Skup klasa zasluga $\{1, 2, \dots, m\}$,
ii. Referentna stopa premije p (moguće stopa neto premije π sa sigurnosnim troškom),
iii. Koeficijent premije $\gamma\,(j)$ za klasu zasluga j, $j = 1, 2, \dots, m$ (Za takozvane bonus klase je $\gamma\,(j) < 1$, dok je za takozvane malus klase je $\gamma\,(j) > 1$. Tipično su bonus i malus klase definirane tako da vrijedi $\gamma\,(1) < \gamma\,(2) < \cdots < \gamma\,(m)$.) ,
iv. Koeficijent premije ulazne klase i, $1 < i \leq m$, kojoj su dodijeljene nove police za koje nema prijašnjeg iskustva (Postavljen je tako da vrijedi $\gamma\,(i) \geq 1$) ,
v. Matrica tranzicijskih pravila, navodeći novu klasu zasluga c_{j,n_t} za rizik koji se prije nalazi u klasi zasluga j i koji je prijavio n_t potraživanja u posljednjoj godini.

Stopa premije klase j u vrijeme t je definirana sa $p_t = p\gamma(c_{j,n_t})$. (2.6.4)

U nekim sustavima vrijedi $\gamma(j) < 1$ za $j = 1, 2, \ldots, m-1$, dok je $\gamma(m) = 1$. U ovom slučaju samo je jedna malus klasa, gdje je puna premija potrebna. Takav dogovor se zove NCD sistem (engl. *No-Claim Discount*, NCD). Police koje dobiju popust su samo one koje nisu prijavile nikakva potraživanja u posljednjoj godini. Što je dulji period bez potraživanja, to je veći popust primijenjen na premiju.

Primjer 2.6.1 Tablica 2.6.1 opisuje matricu tranzicijskih pravila BM sistema i pripadne koeficijente premije. Postoji 9 klasa zasluga. Tranzicijsko pravilo je definirano sa:

$$c_{j,n_t} = \begin{cases} max\{j-1,1\} & ako\ n_t = 0 \\ min\{j+2n_t, 9\} & ako\ n_t > 0 \end{cases}. \tag{2.6.5}$$

Polica u najvišoj klasi plaća premiju koja je 4 puta veća od premije za policu u najnižoj klasi.
Tablica 2.6.2 opisuje matricu tranzicijskih pravila NCD sistema i pripadne koeficijente premije. Postoji 6 klasa zasluga. Tranzicijsko pravilo je definirano sa:

$$c_{j,n_t} = \begin{cases} max\{j-1,1\} & ako\ n_t = 0 \\ 6 & ako\ n_t > 0 \end{cases}. \tag{2.6.6}$$

Polica u najvišoj klasi plaća premiju koja je 2.5 puta veća od premije za policu u najnižoj klasi. □

	#potraživanja u trenutnoj godini					
	0	1	2	3	4	...
1	1	3	5	7	9	...
2	1	4	6	8	9	...
3	2	5	7	9	9	...
4	3	6	8	9	9	...
5	4	7	9	9	9	...
6	5	8	9	9	9	...
7	6	9	9	9	9	...
8	7	9	9	9	9	...
9	8	9	9	9	9	...

klasa zahtjeva	koeficijent premije
j	$\gamma(j)$
1	35%
2	50%
3	55%
4	70%
5	85%
6	100%
7	110%
8	130%
9	150%

Tablica 2.6.1 Matrica tranzicijskih pravila BM sistema i pripadni koeficijenti premije, izvor [1, str. 432]

	#potraživanja u trenutnoj godini	
	0	1 ili više
1	1	6
2	1	6
3	2	6
4	3	6
5	4	6
6	5	6

klasa zahtjeva	koeficijent premije
j	
1	40%
2	75%
3	80%
4	85%
5	90%
6	100%

Tablica 2.6.2 Matrica tranzicijskih pravila NCD sistema i pripadni koeficijenti premije, izvor [1, str. 433]

Poglavlje 3

Zamke u implementaciji nediskriminirajućih premija

Od 21.12.2012. je u Europskoj Uniji korištenje spola kao jedne od kategorija u vrednovanju od strane osiguravatelja bilo zabranjeno. U ovom poglavlju je navedeno kako to utječe na određivanje cijene osiguranja koristeći podatke njemačkog auto osiguravatelja. Vidi se da isključenje spola ne eliminira razlike u cijeni između muških i ženskih vozača zbog toga što su mnogi ne-isključujući faktori rizika korelirani sa spolom. To nedvojbeno ide protiv namjere zakonodavca. U ovom poglavlju se govori o tome kako to može biti eliminirano, no za to je potrebna informacija o spolu.

3.1 Uvod

Osiguranje pruža zaštitu od štetnih događaja u zamjenu za premiju i stoga jača uvjete blagostanja za riziku nesklone osobe. Temeljni zadatak osiguravajuće kuće je klasifikacija rizika za potrebe određivanja cijene osiguranja – premije. U ekonomskom smislu, klasifikacija rizika se može promatrati kao kanal kroz kojeg se osiguravajuće kuće natječu u smanjivanju troškova pružanja osiguravajućih ugovora. Klasifikacija rizika se odnosi na upotrebu promatranih varijabli, ili ponašanja (kao što su primjerice spol, starost i pušenje kod cijene). S jedne strane, svaki osiguranik bi trebao plaćati premiju prema njegovom osobnom riziku, dok je s druge strane nepravedno ako se određivanje premije osiguranja bazira na karakteristikama kao što su spol i rasa. Primjer toga je odluka Europskog suda pravde o zabrani spola kao varijable za klasifikaciju rizika u ugovorima o osiguranju. Međutim, takvo legalno ograničenje može dovesti do situacije u kojoj manje rizične osobe plaćaju više premije osiguranja nego što bi trebali prema njihovom pravom riziku čime subvencioniraju više rizične osiguranike koji tada plaćaju niže premije osiguranja nego što bi trebali. To može dovesti do toga da manje rizični uopće nemaju osiguranje, dok više rizični plaćaju višu premiju.

Smatra se da osiguravateljske kuće preferiraju „grupni pristup“ za određivanje cijena (tako da u ovom specifičnom slučaju muškarci i žene predstavljaju dvije grupe), dok zakonodavac preferira „individualistički pristup“ gdje su takve grupne razlike zabranjene u određivanju premije osiguranja. Prema „individualističkom pristupu“ nitko ne bi trebao platiti više, ili manje, zbog toga što pripada određenoj grupi. Mladi muškarci se često klasificiraju visoko rizičnima i stoga se očekuje da će žene subvencionirati muškarce u slučaju automobilskog osiguranja. Ipak, postoji samo ograničeno znanje o razmjerima tih efekata zbog toga što regulator nije specificirao metodologiju za implementaciju uniseks tarifa. Pope i Sydnor raspravljaju da opća metoda jednostavnog isključivanja socijalno neprihvatljive (u ovom slučaju spol) varijable može doprinijeti nenamjeravanim rezultatima ako izostavljena varijabla korelira sa ostalim nezavisnim varijablama. Determinante premije, koje ostaju u modelu i koje koreliraju sa spolom, bi tada poslužile kao zamjena za spol. U ovom radu koristi se hedonistička cjenovna regresija za podatke dostupne od njemačkog auto osiguravatelja. Navodi se učinak zabrane spola kao jedne od varijabli za određivanje premije na način da se jednostavno izostavi spol kao varijabla. Pretpostavlja se da osiguravajuća društva preferiraju ovu metodu zbog toga što pruža drugu najbolju točnost. Na kraju su istaknute procjene onoga što je zakonodavac predvidio, primjenjujući metodu predloženu od strane Pope i Sydnor (2011). Ta metoda uključuje dva koraka: u prvom koraku se koristi cjeloviti model sa svim nezavisnim varijablama, uključujući i spol. Nadalje, u drugom koraku, predviđene vrijednosti su generirane iz procijenjenih koeficijenata socijalno prihvatljivih varijabli i prosjeka izbačene varijable. To osigurava da socijalno prihvatljive varijable (koje su korelirane sa spolom) zadrže moć predviđanja iz potpune procjene i neće zamijeniti spol u uniseks procjeni.

3.2 Automobilsko osiguranje u Njemačkoj

Automobilsko osiguranje u Njemačkoj ima 3 stupa:

- *Osiguranje od automobilske odgovornosti* je obvezno osiguranje koje osigurava odgovornost vozača prema trećim osobama za štete uzrokovane vlastitim vozilom u zemlji i inozemstvu;
- *Djelomično kasko osiguranje* koje nije obvezno i koje pokriva vlastite troškove i štete prouzročene krađom, prirodnom nepogodom (oluja, munja, tuča, poplava, …), sudar sa životinjama na cesti, itd. ;
- *Potpuno kasko osiguranje* koje pokriva i slučajne štete na vlastitom automobilu (čak ako su uzrokovane i od strane vlasnika automobila) i štete nastale kroz vandalizam drugih. Nije obavezno.

Za oba tipa neobaveznog osiguranja može se odabrati iznos samopridržaja (u djelomičnom kasko osiguranju bira se između 0, 150, 300, 500 i 1000 Eura, a u potpunom osiguranju između 0, 150, 300, 500, 1000 i 2500 Eura). U Njemačkom auto osiguranju postoji univerzalni iskustveni ocjenjivački sistem koji se odnosi na obvezno osiguranje i potpuno kasko osiguranje, ali ne i na djelomično kasko osiguranje. Broj godina bez nesreće se računa odvojeno za te dvije vrste i u skladu s tim brojevima, svaki osiguranik je podijeljen u razrede koji se asociraju sa bonus koeficijentima. Za bilo koju godinu t, premija se računa kao rezultat bazne vrijednosti i tog koeficijenta. Bazna vrijednost može biti postavljena od strane osiguravatelja i ne može biti povezana sa prošlim događajima i iskustvom.

U nastavku su navedeni rezultati dobiveni su na temelju podataka njemačkog auto-osiguravatelja. Podatci potječu od regionalnog osiguravatelja koji ima značajan tržišni udio u tom području. Može se pretpostaviti da vjerno reprezentiraju njemačko tržište auto-osiguranja. U analizi su isključeni ugovori gdje više od jedne osobe vozi auto kako bi se na temelju toga mogao utvrditi spol osobe koja zapravo vozi auto. Koriste se podatci za 2011. godinu.

3.3 Empirijski modeli i rezultati

3.3.1 Hedonistički cjenovni model

Klasifikacija rizika i računanje cijena ugovora o osiguranju je osnovni posao aktuarske znanosti. Koristi se dolje navedena hedonistička funkcija za svaki individualni i, kako bi se procijenile implicitne cijene spola kao atributa i ostalih osiguravateljnih atributa u funkciji premije za prethodno spomenuta tri tipa osiguranja; obvezno, djelomično i potpuno kasko osiguranje.

$$\begin{aligned} P_i = \beta_0 &+ \sum_{j=1}^{k} \beta_{1j} * Q_{ij} + \sum_{j=1}^{l} \beta_{2j} * TC_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \beta_{3j} * RC_{ij} + \beta_{KT} * KT_i \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \beta_{4j} * AGE_{ij} + \beta_{GEN} * GEN_i + \sum_{j=1}^{2n} \beta_j * AGE_{ij} * GEN_i \\ &+ \beta_{GAR} * GAR_i + \beta_{EP} * EP_i + \beta_{PO} * PO_i + \beta_{PRO} * PRO_i \\ &+ \beta_{AGE\_CAR} * AGE\_CAR_i + \sum_{j=1}^{l} \beta_{5j} * BMC_{ij} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

- Q_{ij} : izbor samopridržaja (nema za obavezno osiguranje)
- TC_{ij} : tip automobila
- RC_{ij} : regionalna klasa
- KT_i : prijeđeni kilometri
- AGE_{ij} : skupina vozača po starosti
- GEN_i : spol
- GAR_i : dostupnost garaže
- EP_i : snaga motora
- PO_i : duljina vlasništva nad vozilom
- PRO_i : vlasništvo
- AGE_CAR_i : starost vozila
- BMC_{ij} : koeficijent bonusa (ne za djelomično kasko osiguranje)

Za kategorijske varijable jedna kategorija je izostavljena prilikom procjene regresijske jednadžbe kako bi se spriječila multikolinearnost. Ta kategorija služi kao referentna kategorija prilikom interpretacije rezultata. Samo za starost vozača se koristi devijantna klasifikacija. Definirana je jedna starosna grupa između 17 i 20 godina, dok su ostali intervali širine 5 godina.

Osiguranje	1	3	2
Varijable	premija (EURO)	premija (EURO)	premija (EURO)
17-20	233,853***	44,959*	37,834***
21-25	130,374***	76,02***	47,444***
26-30	-16,337***	-48,306***	27,104***
31-35	-37,654***	-67,226***	12,293***
36-40	-24,004***	-41,833***	3,565**
41-45			
46-50	19,422***	8,032	-1,31
51-55	16,482***	-2,118	-3,398**
56-60	3,748	-28,536***	-7,336***
61-65	10,137***	-42,841***	-14,628***
66-70	59,894***	-24,005***	-23,585***
71-75	139,06***	28,122***	-22,906***
76-80	255,148***	116,582***	-24,671***
81-85	365,274***	207,687***	-23,75***
86-90	518,279***	329,237***	-25,736***
17-20_zene	-88,273***		-8,497
21-25_zene	-140,594***	-75,366***	-25,995***
26-30_zene	-16,063***	24,273***	-6,613***
31-35_zene	-0,383	36,472***	-3,686*
36-40_zene	-2,167	26,299***	-2,015
41-45_zene			
46-50_zene	-1,849	-3,923	1,224
51-55_zene	-4,653	10,283	-0,135
56-60_zene	2,629	24,988***	2,356
61-65_zene	-3,358	26,63***	3,391
66-70_zene	11,466**	42,933***	5,255**
71-75_zene	26,376***	48,505***	6,726***
76-80_zene	24,305**	44,671***	9,791***
81-85_zene	30,543	65,045*	4,181
86-90_zene	-15,088	287,738*	7,259
zene	7,996***	-18,643***	-0,444
km u god u tisućama	6,679***	13,45***	1,841***
snaga motora	0,297***	0,459***	0,314***
starost automobila	5,033***	14,947***	0,601***
period vlasništva	-6,008***	-10,255***	-2,468***
*** p < 0,01 ** p < 0,05 * p < 0,1			

Tablica 3.3.1 : Rezultati regresije sa spolom, izvor [6]

Rezultati hedonističke regresije su dani u Tablica 3.3.1 . Glavni pronalasci mogu se sažeti kao: mlađi muškarci i starije žene plaćaju više premije osiguranja nego mlađe žene i stariji muškarci. U obveznom osiguranju, mlađi muškarci (21-25 godina) plaćaju prosječno 131 Euro više nego muškaraci srednjih godina (41-45) koji se koriste kao referentna kategorija. Međutim, mlađe žene (21-25) plaćaju 2 Eura manje (131-141+8 = -2) nego grupa muškaraca srednjih godina. To znači da, ako gledamo populaciju od 21-25, grupa mlađih muškaraca plaća oko 133 Eura više nego mlađe žene. U potpunom kasko osiguranju muškarci (21-25) plaćaju oko 94 Eura više nego usporedni ženski vozač, u djelomičnom kasko osiguranju, muškarac (21-25) plaća oko 26 Eura više nego usporedni ženski vozač. Međutim, stvari su suprotne kada se u obzir uzme starija populacija. Primjerice, vozačice između 71 i 75 plaćaju 34 Eura više nego muškarci u obveznom osiguranju, 30 Eura više u potpunom kasko osiguranju i 7 Eura više u djelomičnom kasko osiguranju.

3.3.2 Kako mogu izgledati unisex tarife

U ovom odjeljku prikazano je kako mogu izgledati uniseks tarife primjenjujući dvije različite metode; jednu za koju postoji veća vjerojatnost da je preferirana od strane osiguravajuće kuće i jednu za koju je vjerojatnije da implementira namjeru zakonodavca.

3.3.2.1 Što osiguravajuća kuća preferira: opća metoda

Opći pristup jest da se isključi zabranjena varijabla (spol) iz varijabli koje se koriste za klasifikaciju rizika. To znači da bi neke ostale varijable, koje koreliraju sa spolom, mogle uzeti dio tog efekta. To bi se moglo suprotstaviti inicijalnoj ideji zakonodavca da zabrani diskriminaciju jer zamjenske varijable naknadno vrate diskriminaciju. Primjerice, u automobilskom osiguranju, spol može biti koreliran sa snagom motora te u slučaju zabrane spola kao varijable, snaga motora može poslužiti kao zamjena za spol.
Primjenjuje se sljedeća hednostička funkcija, koja se razlikuje od jednadžbe (3.3.1) samo u činjenici da je spol (kao varijabla) izbačena iz jednadžbe:

$$\begin{aligned} P_i \; = \; \beta_0 \; + \; \textstyle\sum_{j=1}^{k} \beta_{1j} * Q_{ij} \; + \; \sum_{j=1}^{l} \beta_{2j} * TC_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \beta_{3j} * RC_{ij} \; + \; \beta_{KT} * KT_i \\ + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \beta_{4j} * AGE_{ij} + \; \beta_{GAR} * GAR_i \; + \beta_{EP} * EP_i \; + \; \beta_{PO} * PO_i \\ + \beta_{PRO} * PRO_i + \; \beta_{AGE_{CAR}} * AGE_{CAR_i} \; + \; \textstyle\sum_{j=1}^{l} \beta_{5j} * BMC_{ij}. \qquad (3.3.2.1.1) \end{aligned}$$

U Tablica 3.3.2.1.1 vide se rezultati regresijskog modela kada je spol izbačen kao nezavisna varijabla. Čini se da je informacija o spolu dobro prisutna u ostalim nezavisnim varijablama. Snaga motora ima primjerice snažnu negativnu korelaciju sa spolom (-0,226). Ako je spol izbačen, naravno, muškarci i žene koji pristupaju osiguravajućoj kući s jednakim karakteristikama bi platili jednako. Međutim, karakteristike nisu jednake između muških i ženskih vozača. Tablica 3.3.2.1.2 prikazuje prosječnu vrijednost varijabli snaga motora, godišnje prijeđeni kilometri, starost automobila i duljina vlasništva za oba spola.

Analizirajući korelaciju između predviđenih i stvarnih premija dobije se da u obveznom osiguranju korelacija iznosi 0,850 ako se koristi spol kao varijabla i 0,846 kada se ne koristi. To je dodatan dokaz kako se većina informacija o spolu može dobro obuhvatiti ostalim nezavisnim varijablama. Dakle, i nakon implementacije uniseks tarifa, osiguravajuće kuće mogu zadržati iste razlike u premijama osiguranja između muških i ženskih vozača. To naravno nije ono što je zakonodavac namjeravao.

Osiguranje	1	3	2
Varijable	premija (EURO)	premija (EURO)	premija (EURO)
17-20	189,225***	36,509	33,063***
21-25	46,159***	19,083***	30,439***
26-30	-22,187***	-37,702***	24,289***
31-35	-37,764***	-52,341***	11,092***
36-40	-24,738***	-41,833***	2,825***
41-45			
46-50	18,743***	6,733	-0,888
51-55	15,011***	2,447	-3,408***
56-60	5,084**	-17,795***	-6,388***
61-65	9,237***	-31,587***	-13,446***
66-70	63,700***	-7,648	-21,626***
71-75	147,687***	45,281***	-20,495***
76-80	261,906***	130,897***	-21,443***
81-85	371,345***	225,735***	-22,591***
86-90	513,456***	414,522***	-23,483***
km u god u tisućama	6,624***	13,455***	1,839***
snaga motora	0,307***	0,473***	0,322***
starost automobila	5,147***	15,041***	0,638***
period vlasništva	-5,965***	-10,286***	-2,454***
*** p < 0,01 ** p < 0,05 * p < 0,1			

Tablica 3.3.2.1.1 : Rezultati regresije bez spola, izvor [6]

	starost	prosjek m	prosjek z	p-vrijednost
snaga motora (ks)	21-25	78,43	60,31	0
	26-30	85,89	68,6	0
starost automobila	21-25	8,57	7,02	0
	26-30	7,24	6,25	0
period vlasništva	21-25	1,53	2,09	0
	26-30	2,47	2,71	0
km u god u tisućama	21-25	11,74	11,41	0,23
	26-30	12,41	11,78	0

Tablica 3.3.2.1.2 : Prosječna vrijednost varijabli po spolu, izvor [6]

3.3.2.2 Što je zakonodavac namjeravao: Pope i Sydnor metoda

Pope i Sydnor (2011) predlažu metodu prema kojoj bi muškarci i žene plaćali isti iznos premije osiguranja. Njihova ideja je da se koriste sve, čak i zabranjene varijable, za klasifikaciju rizika i određivanje cijene u prvom koraku. U drugom koraku računa se prosjek preko zabranjene varijable. U navedenom slučaju, sa spolom kao zabranjenom varijablom, koristili bi sve varijable i tada bi uspostavili formulu za određivanje cijene. Premija osiguranika je na kraju prosjek muškaraca i žena koristeći formulu iz prvog koraka, a da su sve varijable tretirane jednako. No, jednostavno uprosjećivanje nije dovoljno i mora biti zamijenjeno sa vaganim prosjekom prema distribuciji u skupu podataka. Primjerice, u navedenom slučaju, premija muškaraca i žena mora biti vagana prema njihovoj proporciji u skupu podataka.

Za izračun premije korigirane za spol prema Pope i Sydnor metodi, varijabla spol mora biti poznata. To bi moglo biti kontraproduktivno jer bi s jedne strane diskriminacija trebala biti spriječena, a s druge strane tu informaciju moraju znati osiguravajuće kuće.

Podatci u Tablica 3.3.2.2.1. su i dalje povezani sa referentnom grupom, muškarcima između 41 i 45 godina. U obveznom osiguranju, mlađi muškarci (17-20) moraju platiti oko 234 EURA više od srednjovječnih muškaraca (referentna grupa). Mlađe žene, međutim, moraju platiti samo 154 EURA (153.58 = 233.85 – 88.273 + 7.996) više od referentne grupe. Te procjene su iz Tablica 3.3.1 . Tada kalkuliramo nediskriminatorne tarife ponderirajući te procjene sa udjelom odgovarajućeg spola među osiguranicima (195,72 = 0,475*153,58+0,525*233,85). Radi se uz pretpostavku da se dekompozicija proporcije spola ne mijenja sa promijenjenim premijama. Za ovaj zadatak, može se zaključiti da ako se uniseks tarife implementiraju za različite starosne grupe, mlađi muškarci će morati platiti oko 40 EURA manje i mlađe žene oko 40 EURA više nego prije. Također vide se ti subvencionirajući efekti za grupu starijih muškaraca i žena – žene između 66 i 70 godina plaćaju oko 80 EURA više nego referentna grupa srednjovječnih muškaraca, dok muškarci iz iste starosne skupine plaćaju 60 EURA više. Navedena kalkulacija uniseks tarifa sugerira da će nakon implementacije uniseks tarifa žene plaćati 10 EURA manje u toj starosnoj skupini, dok će muški vozači plaćati 9 EURA više. U tim kalkulacijama zanemarena je činjenica da osiguravajuće kuće mogu dodati neki postotak na premiju zbog toga što ne znaju kako će se promijeniti rizični bazen nakon implementacije uniseks tarifa.

Osiguranje	**1**			**3**			**2**		
	delta unisex	**delta ž**	**delta m**	**delta unisex**	**delta ž**	**delta m**	**delta unisex**	**delta ž**	**delta m**
17-20	195,72	153,58	233,85	33,58	28,89	37,83			44,96
21-25	67,38	-2,22	130,37	34,88	21,01	47,44	31,36	-17,99	76,02
26-30	-20,16	-24,4	-16,34	23,75	20,05	27,1	-45,63	-42,68	-48,31
31-35	-34,03	-30,04	-37,65	10,32	8,16	12,29	-58,76	-49,4	-67,23
36-40	-21,23	-18,18	-24	2,40	1,11	3,57	-38,19	-34,18	-41,83
41-45		8			0			-18,64	
46-50	22,34	25,57	19,42	-0,93	-0,53	-1,31	-2,68	-14,53	8,03
51-55	18,07	19,83	16,48	-3,67	-3,98	-3,4	-6,09	-10,48	-2,12
56-60	8,79	14,37	3,75	-6,42	-5,42	-7,34	-25,52	-22,19	-28,54
61-65	12,34	14,78	10,14	-13,22	-11,68	-14,63	-39,04	-34,85	-42,84
66-70	69,13	79,35	59,9	-21,30	-18,77	-23,59	-12,46	0,29	-24,01
71-75	155,38	173,43	139,06	-19,92	-16,62	-22,91	42,30	57,98	28,12
76-80	348,53	287,45	403,81	-20,22	-15,32	-24,67	128,94	142,61	116,58
81-85	383,57	403,81	365,27	-21,97	-20,01	-23,75	229,73	254,09	207,69
86-90	514,91	511,19	518,28	-22,50	-18,92	-25,74	457,05	598,33	329,24

Tablica 3.3.2.2.1: Cijene prema Pope i Sydnor metodi, izvor [6]

Pitanje koje se nameće je kako će se zakonodavac moći uvjeriti da ono što je namjeravano, i implementirano. Jedna ideja mogla bi biti da se specificira metodologija za implementaciju uniseks tarifa. Da je zakonodavac zahtijevao primjenu Pope Sydnor metode, taj problem ne bi postojao. Drugo, manje elegantno rješenje bi bilo da se zabrani korištenje varijabli koreliranih sa spolom. Pope i Sydnor (2011) izvještavaju da su u Kaliforniji 1988. godine varijable koje su korelirane sa izbačenom varijablom također zabranjene. Međutim, zabrana svih varijabli koje su korelirane sa spolom će dovesti do jako ograničenog modela sa malom preciznosti predviđanja. To bi moglo izazvati osiguravajuće kuće da povise premije zbog porasta neizvjesnosti. Zbog toga se smatra da bi specifični modeli bili najbolji način za zakonodavca ako žele vidjeti svoje namjere implementiranima.

Bibliografija

[1] A. Olivieri, E. Pitacco, Introduction to insurance mathematics, Technical and Financial Features of Risk Transfers, Springer, 2011.

[2] linearna, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/statpr/files/linearna.pdf (kolovoz, 2015.)

[3] M. Huzak, vms, dostupno na http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/vms.pdf (kolovoz, 2015.)

[4] N. Sarapa, Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[5] V. Botrić, pkiep98_botric, dostupno na http://hrcak.srce.hr/18576 (kolovoz, 2015.)

[6] V. Aseervatham, C. Lex, M. Spindler, SessionIVA-UnisexTariffsandtheAutomobileInsuranceMarket-InsightsfromGermany-Paper, dostupno na http://www.aria.org/meetings/2013_Annual_Meeting_docs/TuesdaySession_IVA/SessionIVA-UnisexTariffsandtheAutomobileInsuranceMarket-InsightsfromGermany-Paper.pdf (kolovoz, 2015.)

[7] Z. Vondraček, sp-p02, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp-p02.pdf (kolovoz, 2015.)

Sažetak

U ovom radu je objašnjeno kako zabrana spola kao faktora rizika prilikom određivanja premija utječe na određivanje cijene osiguranja. Vidi se da isključenje spola ne eliminira razlike u cijeni između muških i ženskih vozača zbog toga što su mnogi ne-isključujući faktori rizika korelirani sa spolom. Tu metodu preferiraju osiguravajuća društva, no to nedvojbeno ide protiv namjere zakonodavca. Kako bi se zakonodavac uvjerio da je ono što je namjeravao i implementirano, trebao je specificirati metodologiju za implementaciju uniseks tarifa. Primjerice, prema Pope i Sydnor metodi se i dalje koriste sve varijable za klasifikaciju rizika i određivanje cijene u prvom koraku. U drugom koraku računa se prosjek preko zabranjene varijable. Dakle, u ovom slučaju muškarci i žene bi plaćali istu premiju.

Prije razmatranja dviju metoda izračuna unisex premija, navedene su osnove aktuarskog procjenjivanja pokrića neživotnog osiguranja. Dan je kratak opis glavnih značajki proizvoda neživotnog osiguranja potreban za računanje premija. Prvi idući korak potreban za izračun premija je procjena mogućeg iznosa potraživanja. Dalje su definirane premija ekvivalencije, neto i bruto premija. Kako bi se izračunala premija ekvivalencije, navode se statističke procjene potrebnih veličina. Kada skup dostupnih podataka koji izražava iskustvo potraživanja nije dovoljno dobar pokazatelj (npr. nije dovoljno velik), pristupa se stohastičkom modeliranju ukupne količine potraživanja. Kako se police uvijek razlikuju u nekim svojstvima, predlaže se usvajanje posebnih stopa premija, odnosno police se klasificiraju prema riziku.

Summary

In this work, it is explained that prohibition of the use of gender as a risk factor for determining premiums affects insurance pricing. It is evident that gender exclusion doesn't eliminate differences between male and female drivers because many non-excluded risk factors are correlated with gender. This is the method preferred by insurance companies, but that is without a doubt against the wishes of the legislator. In order to convince himself that what he intended is actually implemented, legislator needed to specify a methodology for implementation of unisex tariffs. In example, according to Pope and Sydnor method, in the first step all variables for risk classification and pricing are still used. In the second step, average is calculated using the banned variable. In this case, men and women would pay the same premium.

Before considering two methods of unisex premium calculation, we provide the fundamentals of the actuarial valuation of non-life insurance covers and short description of the main product features of non-life insurance products. Next required step for premium calculation is to assess a possible amount of claims. Furthermore, we define the equivalence premium, the net premium and the expense-loaded (or gross) premium. To calculate the equivalence premium, we cite the statistical estimate of required quantities. When the data set expressing the claim experience of the insurer is not a good enough indicator (in the example, not big enough), stochastic modeling of aggregate claim amount is used. Considering that policies always differ in some features, the adoption of specific premium rates is suggested, this is, policies are classified by risk.

Životopis

Rođena sam 25.11.1991. u Zaboku. Pohađala sam PŠ Donja Batina u Donjoj Batini, te OŠ Ante Kovačića Zlatar u Zlataru. Nakon završene osnovne škole, upisujem Srednju školu Zlatar u Zlataru, smjer opća gimnazija. Maturirala sam 2010. godine , te iste godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku. Titulu prvostupnika matematike stekla sam 2013. godine. Te godine upisujem i diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.